Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
příspěvková organizace

Moravskoslezský matematický šampionát 2024

Sborník

Ostrava-Poruba
17. 10. 2024

Organizační výbor

PaedDr. Antonín Balnar, Ph.D.	hlavní organizátor
Mgr. Jana Gajdušková	odborný matematický dohled

Autoři a recenzenti

RNDr. Ivana Breginová, Mgr. Lenka Dedková, Mgr. Jana Gajdušková,

Mgr. Petra Kňurová, Mgr. Lenka Hořenková Kucosová,

Mgr. Tomáš Krchňák, Mgr. Veronika Pavlíková, Mgr. Lenka Plášková,

Mgr. Pavel Skalný, Ph.D., Mgr. Marie Štípalová,

RNDr. Michal Vavroš, Ph.D.

Obsah

Úvodní slovo

Bioplynem k vodíku, aneb Využití anaerobní digesce pro výrobu zeleného vodíku pomocí pyrolýzy methanu. Korelace modelů gravitačního pole Měsíce GL1500E a RFM_2519. Tohle nejsou názvy disertačních prací, za jejichž obhajobu získali studenti doktorát, ale práce žáků středních škol, za které získali ocenění Česká hlavička. Mají jednu společnou vlastnost – jejich dopad nemá podobu popsaného papíru, ale reálné možnosti změnit technologii a následně svět, v němž žijeme. Stejně tak mají jednu společnou vlastnost jejich autoři – cílevědomost. Žijeme ve světě, kde si žák střední školy dokáže stanovit velmi ambiciózní cíl a ve kterém se nachází takové množství informací, zdrojů, prostředků a PODPORY lidí, že není nereálné cíle dosáhnout. V celé rovnici nám však ještě chybí jeden člen – jiskra, která byla na počátku a která v těch úspěšných středoškolácích celý proces spustila. Tou jiskrou může být pocit úspěchu, který zažili ve spojení s vědou. A protože matematika je matka věd, musela v tom hrát buď roli přímou, nebo alespoň rodičovskou.

Všichni lidé, kteří připravovali a připravují Moravskoslezský matematický šampionát, mají také svůj cíl – umožnit žákům zažít úspěch v matematice a stát se zdrojem té jiskry, která skončí změnou technologie výroby vodíku. Takovým úspěchem nemusí být zvítězit, ale třeba jen najít odvahu poprat se s příkladem, tedy s problémem. Přeji vám, abyste zažili úspěch, aby zažehl jiskřičku a abyste byli cílevědomí. A protože jste tady, udělali jste k tomu první krok.

Mgr. Jan Netolička
ředitel Wichterlova gymnázia

Nerovnosti mezi průměry

Anotace přednášky

V přednášce se posluchači seznámí se třemi typy průměrů: aritmetickým, geometrickým a harmonickým. Bude ukázáno, kde se lze s těmito průměry setkat, jaké jsou jejich vzájemné souvislosti a jak lze dosažených znalostí využívat při řešení problémů.

prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
vedoucí Katedry aplikované matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky, VŠB-TU Ostrava

Zahradníci

Zadání

a) Tři zahradníci Lukáš, Jirka a Pavel se dohadovali, kolik hlávek zelí jim každému vyrostlo na záhoně. Lukáš věděl jistě, že sklidil 30 hlávek. Počet hlávek zelí Jirky byl roven aritmetickému průměru hlávek na záhonech Lukáše a Pavla. Na Pavlově záhonu vyrostla třetina hlávek zelí ze součtu obou zbývajících záhonů.

Kolik hlávek zelí vypěstoval Pavel a kolik Jirka?

b) Z vypěstovaného zelí si chtěli kamarádi naložit velké sklenice kimči. Dohodli se, že k nakládání kromě zelí použijí ještě mrkev, kedluben a petržel. Do každé sklenice dali třikrát více mrkví než petrželí a dvakrát více petrželí než kedluben. Hlávek zelí spotřebovali tolik jako kedluben a petrželí dohromady, což bylo o tři méně než mrkví.

Kolik kusů každé zeleniny nakrouhali a naložili do jedné sklenice?

c) Po práci si začali povídat, zapálili dvě svíčky a řekli, že se rozloučí a odejdou domů, až obě svíčky budou stejně vysoké. Bílá svíčka byla vysoká 30 cm a celá by shořela za 150 minut. Modrá svíčka byla vysoká 48 cm a celá by shořela za 120 minut.

Jak dlouho si Pavel, Jirka a Lukáš povídali? Jak vysoké byly v tu dobu svíčky?

d) Lukáš bydlel ve vedlejší vesnici. Domů se vracel od kamarádů přes řeku mostem osvětleným pouličními lampami. Všiml si, že most je osvětlen 21 lampami, které jsou umístěny střídavě po obou stranách, vzdálenost kterýchkoliv dvou sousedních lamp kdekoliv na mostě je 11 metrů. První lampa stojí na začátku mostu a poslední na jeho konci.

Jak dlouhý je most, po kterém chodí Lukáš domů?

Řešení

a)

Označíme x počet hlávek zelí, které vypěstoval Jirka, počet vypěstovaných hlávek Pavla označíme jako y. Podle zadání sestavíme rovnice

$$x = \frac{30 + y}{2}, \quad y = \frac{30 + x}{3}$$

a odstraníme zlomky

$$2x = 30 + y, \quad 3y = 30 + x.$$

Tuto soustavu dvou rovnic vyřešíme například dosazovací metodou. Dostáváme $x = 24$ a $y = 18$.

Pavel vypěstoval 18 hlávek a Jirka vypěstoval 24 hlávek zelí.

b)

Počet kedluben označíme x, počet petrželí bude $2x$, počet mrkví $3 \cdot 2x = 6x$ a počet hlávek zelí $x + 2x = 3x$. Ze zadání vyplývá $3x = 6x - 3$, tedy $x = 1$.

Do sklenice nakrouhali 1 kedluben, 2 petržele, 6 mrkví a 3 hlávky zelí.

c)

U bílé svíčky za 150 minut shoří 300 mm, za 1 minutu shoří $\frac{300}{150} = 2$ mm.

U modré svíčky shoří 480 mm za 120 minut, tedy za 1 minutu 4 mm.

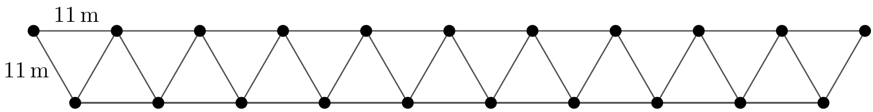
Jestliže označíme x počet minut, za jak dlouho budou obě svíčky stejně vysoké, můžeme zapsat rovnici $300 - 2x = 480 - 4x$. Řešením dostáváme $x = 90$ minut.

Bílá svíčka bude vysoká $300 - 2 \cdot 90 = 120$ mm $= 12$ cm, stejně tak modrá svíčka $480 - 4 \cdot 90 = 120$ mm $= 12$ cm.

Kamarádi si povídali 90 minut a svíčky byly vysoké 12 cm.

d)

Na jedné straně mostu je 11 lamp, na druhé straně 10 lamp. Lampy můžeme znázornit ve dvou řadách jako vrcholy rovnostranných trojúhelníků.



Délku mostu tvoří řada jedenácti za sebou stojících lamp, vzdálenost mezi každými dvěma sousedními je 11 metrů, mezi 11 lampami je deset jedenáctimetrových vzdáleností, tedy $10 \cdot 11 = 110$ m.

Není pohyb jako pohyb

Zadání

a) Olina slyšela písničku o tom, že Země obíhá kolem Slunce rychlostí 30 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$. Údaj si ověřila a rozhodla se spočítat, jakou dráhu oběhne Země za jeden rok (365 dní).

Spočítejte to také a výsledek vyjádřete užitím mocnin deseti ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde a je přirozené číslo, $a < 10$ (např. $3\,000\,000 = 3 \cdot 10^6$).

b) Tatínek a Honzík se vydali na cyklistický výlet, během kterého si Honzík stěžoval, že musí více šlapat. Aby zjistili, proč tomu tak je, rozhodli se spočítat otáčky kol. Změřili průměr kol: kolo tatínka má průměr ráfku 28 palců a Honzíkovo kolo 24 palců (1 palec $\doteq$ 2,5 cm).

Vaším úkolem je pomoci Honzíkovi a tatínkovi zjistit, o kolik otáček více udělá Honzíkovo kolo na vzdálenosti 1 km ve srovnání s kolem tatínka.

Při výpočtu použijte hodnotu $\pi \doteq 3{,}14$ .Výsledek zaokrouhlete na celé číslo.

c) Hanka se zadívala na kuchyňské hodiny a pozorovala neustálý pohyb minutové a hodinové ručičky na ciferníku. Na základě tohoto pozorování připravila pro svou sestru následující úlohy:

Urči velikosti konvexních úhlů mezi minutovou a hodinovou ručičkou v časech 1:00, 3:00, 4:00, 6:00 hodin. Výsledné úhly zapiš v postupném poměru v základním tvaru.

Urči přesně, jaký úhel spolu svírají ručičky v čase 5:10 hodin.

d) Karel, Jenda a Lukáš jsou sportovci, každý je z jiného města, každý má rád jeden sport. Víme o nich, že:

Jeden z nich se věnuje kopané.
Jendův oblíbený sport není běh.
Lukáš se nevěnuje plavání a není z Prahy.
Ten, který běhá, není z Ostravy.
Plavec je z Brna.

Kdo je z Prahy a kdo má rád kopanou?

Řešení

a)

Můžeme převést rychlost $30 \, \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = 108\,000 \, \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 2\,592\,000 \, \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{den}}$.

Dráhu Země pak vypočítáme užitím známého vzorce $s = v \cdot t$, po dosazení $s = 2\,592\,000 \cdot 365 = 946\,080\,000$ km, po úpravě $s \doteq 9 \cdot 10^8$ km.

Země oběhne dráhu $9 \cdot 10^8$ km.

b)

Obvod kola v palcích vypočítáme podle vzorce $o = 2\pi r$ nebo $o = \pi d$, $o_1 = 87{,}92$ palců a $o_2 = 75{,}36$ palců, dráha 1 km odpovídá 40 000 palců. Počet otáček p na dráze 1 km pak bude 40 000 : o, tedy $p_1 = 455, p_2 = 531$. Rozdíl $p_2 - p_1 = 76$, tedy dětské kolo udělá o 76 otáček více.

Jiný postup s využitím převodu na centimetry:

$d_1 = 70$ cm, $d_2 = 60$ cm. Obvod $o_1 = 219{,}8$ cm a $o_2 = 188{,}4$ cm a počet otáček na dráze 1 km $p_1 = 455, p_2 = 531$. Rozdíl je opět 76 otáček.

c)

Velikosti úhlů ručiček v časech 1:00, 3:00, 4:00, 6:00 jsou v tomto pořadí $30°, 90°, 120°, 180°$.

Postupný poměr zjednodušíme $30 : 90 : 120 : 180 = 1 : 3 : 4 : 6$.

Hodinová ručička se za hodinu posune o úhel $360° : 12 = 30°$, za minutu o úhel $30° : 60 = 0{,}5°$.

V čase 5:10 svírají obě ručičky úhel 90° zvětšený o úhel φ, který za 10 minut uběhla hodinová ručička. Úhel $\varphi = 0{,}5 \cdot 10 = 5°$. Velikost výsledného úhlu je $90° + 5° = 95°$.

Ručičky hodin tedy v 5:10 svírají úhel 95°.

d)

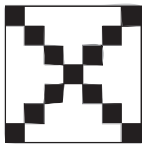
Z informací o Lukášovi a plavci vyplývá, že Lukáš je z Ostravy. Proto se Lukáš nevěnuje běhu, věnuje se kopané. Pro Jendu nám zbývá plavání a je tedy z Brna. Z Prahy je pak Karel.

Čísla 2024 a 2025

Zadání

1. Matyáš má celkem 2024 kuliček pěti barev. Polovina je červených, čtvrtina žlutých, osmina zelených a jedenáctina modrých. Kolik kuliček má fialovou barvu?

2. Uvažme čtverec o délce strany 2025 (délkové jednotky) a v něm na diagonálách obarvené všechny čtverce o straně 1. Na obrázku je situace znázorněna pro čtverec o délce strany 7.



   a) Kolik malých čtverců je černě vybarveno ve čtverci o délce strany 2025?

   b) Jak velká plocha našeho čtverce není vybarvena?

3. Krabičky od bluetooth reproduktorů tvaru kvádru mají rozměry 8, 11 a 23 cm a při jejich balení nás napadlo, zda by je šlo uložit do velké kartonové krabice. Pro dobrou manipulaci a uskladnění si zkusíme představit, že by měla tvar krychle.

   a) Jakou délku by měla hrana nejmenší kartonové krabice tvaru krychle, do níž bychom postupně ukládali krabičky s reproduktory? Krabičky ukládáme systematicky bez mezer tak, že jimi úplně zaplníme velkou krychlovou krabici.

   b) Kolik krabiček s reproduktory bychom potřebovali na zaplnění takovéto jedné velké krychlové krabice?

   c) Na základě předchozích výpočtů posuďte vhodný dopravní prostředek pro převoz a manipulaci s touto kartonovou krabicí.

4. Na letní dovolené z Ostravy do italského Trenta a zpátky jsme ujeli celkem 2024 km. Průměrná rychlost při cestě tam byla $90\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, při stejné cestě zpátky, ale už bez zdržení v kolonách na dálnicích, $110\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Jaká byla celková průměrná rychlost na trase Ostrava Trento a zpět? Nabízí se jednoduše použít aritmetický průměr obou rychlostí. Je otázka, zda je to dobře.

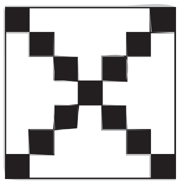
Řešení

1.

Kuličky červené, žluté, zelené a modré barvy představují $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}=\frac{85}{88}$ z celkového počtu 2024 kuliček. Počet kuliček odpovídající $\frac{1}{88}$ z celkového počtu je $2024 : 88 = 23$ a tedy $\frac{3}{88}$ představují 69 kuliček fialové barvy.

2. a)

Prostým pozorováním počtu obarvených čtverců zjistíme, že v každém řádku jsou černě vybarveny dva čtverce, jen v prostředním řádku je obarvený jen jeden čtverec. Tedy celkem máme $2 \cdot 2024 + 1 = 4049$ obarvených čtverců.



2. b)

Obsah daného čtverce lze vyjádřit jako 2025^2 (plošné jednotky), obsah zabarvené části pak ve stejné jednotce $1 \cdot 2025 + 1 \cdot 2024 = 4049$. Nezabarvená plocha má v daných plošných jednotkách velikost $2025^2 - 4049 = 4\,096\,576$. I bez kalkulátoru dojdeme krátkou úpravou k výsledku následujícím způsobem: $2025 \cdot 2025 - 1 \cdot 2025 - 1 \cdot 2024 = 2025 \cdot 2024 - 1 \cdot 2024 = 2024 \cdot 2024 = 2024^2 = 4\,096\,576$.

Obsah nezabarvené části čtverce je roven $2024^2 = 4\,096\,576$. (plošné jednotky).

3. a)

Nejmenší společný násobek čísel 8, 11 a 23 je 2024, a to je i odpověď na otázku, jakou délku by musela mít hrana nejmenší krychlové kartonové krabice, aby se do ní vešlo co nejvíce krabiček ukládaných bez mezer. Je to 2024 cm a reálně to vypadá spíše na malou halu než na krabici.

3. b)

Celkový počet krabiček s reproduktory zjistíme tak, že vypočítáme, kolik krabiček s délkou 8, resp. 11, resp. 23 cm se dá položit za sebou na délku 2024 cm. Krabiček s rozměrem 23 cm se vejde na hranu krychle 88, s rozměrem 11 jich bude 184 a nejkratší rozměr 8 se vejde 253krát.

Celkem by do myšlené krychlové krabice bylo potřeba $88 \cdot 184 \cdot 253 = 4\,096\,576$ reproduktorů.

3. c)

Výpočty naznačují, že manipulace s krabicí tvaru krychle o délce hrany přes 20 m by byla obtížná a pro převoz nemožná (snad jen kontejnerovou lodí).

4.

Celkovou průměrnou rychlost na cestě tam i zpět určíme ze vztahu $v = \frac{s}{t}$, kde s je celková ujetá dráha na cestě tam a zpět, t je celková doba jízdy. Tedy $v_p = \dfrac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$, kde index 1 představuje hodnoty pro cestu tam a index 2 hodnoty pro cestu zpět. Dále víme, že $s_1 = s_2 = s$ a $t_1 = \frac{s}{90}$, $t_2 = \frac{s}{110}$. Po dosazení do vztahu pro celkovou průměrnou rychlost dostaneme

$$v_p = \frac{s + s}{\frac{s}{90} + \frac{s}{110}} = \frac{2s}{s \cdot \left(\frac{1}{90} + \frac{1}{110}\right)} = \frac{2}{\frac{1}{90} + \frac{1}{110}} = 99.$$

Průměrnou rychlost na celé trase z Ostravy do Trenta a zpět lze přímo vypočítat jako harmonický průměr obou rychlostí. Harmonický průměr těchto čísel je $v_p = \dfrac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} = 99\ \ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

Celková průměrná rychlost na cestě do italského Trenta tam i zpět byla $99\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Vzhledem k tomu, že časová náročnost pro jednotlivé cesty nebyla stejná, nelze použít běžně užívaný aritmetický průměr.

Magický součin

Zadání

Byl jednou jeden starodávný čaroděj, který vládl království čísel. Jeho síla spočívala ve znalosti magických kombinací čísel. Jednoho dne se čaroděj rozhodl uspořádat soutěž pro nejlepší matematické mozky v království. Úkol zněl jasně: Najděte největší magickou hodnotu součinu několika přirozených čísel, jejichž součet je přesně 2024. Ti, kteří odhalí tajemství čísel a přinesou čaroději největší možný součin, získají vstup do tajemné věže moudrosti, kde na ně čekají neuvěřitelná tajemství a poklady.

Určete tento největší součin a svou odpověď zdůvodněte.

Řešení

Hledáme n-tici přirozených čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tak, abychom při zachování jejich součtu 2024 maximalizovali jejich součin. Zvažujme různé možnosti pro tato čísla.

V případě, že by jedno z čísel a_i bylo rovno jedné, nahradíme ve vybrané n-tici jiné číslo a_j (pro $i \neq j$) číslem $a_j + 1$. Tím se součet čísel nezmění, ale součin bude větší.

Výběr čísla 2 je v pořádku, ale jeho větší počet musíme promyslet. Volbu tří dvojek lze nahradit dvěma čísly 3. Zachováme součet šest, docílíme však většího součinu ($2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3$). Číslo 2 tedy vybereme maximálně dvakrát.

Výběr čísla 3 je optimální, jeho náhrada jinými čísly nepřinese očekávané zvýšení součinu.

Při některém z výběru čísla $a_i = 4$, lze toto čísla bez problémů nahradit dvěma dvojkami. Nezměníme součet příslušné $n-$tice čísel, ale ani její součin.

Pro čísla $a_i \geq 5$ je situace zajímavější. Při tomto výběru lze číslo a_i nahradit čísly menšími při zachování celkového součtu čísel a zvětšení jejich součinu. Například $5 = 2 + 3$ a $5 < 2 \cdot 3$ nebo $6 = 3 + 3$ a $6 < 3 \cdot 3$. Obdobně lze s výhodou většího součinu rozložit i další vyšší čísla.

V daném výběru n-tice čísel se budou vyskytovat pouze čísla 2 a 3. Protože $2024 = 3 \cdot 674 + 2$, je vhodný výběr čísel $a_1 = 2, a_2 = \cdots = a_{675} = 3$. Součin této 675-tice čísel je roven $2 \cdot 3^{674}$.

Activation Code

Problem

The chief engineer at a space station has the task of programming a new control system. The code to activate the system must contain a three-digit natural number with the following property: ”If we write its units digit (i. e. the digit in its unit place) before the number notation, we get a four-digit number that is 18 less than seven times the number.”

Calculate this part of the special activation code to activate the space system. Don't forget to provide the entire solution.

Solution

A three-digit number in decimal form can be symbolically written as xyz, where $x, y, z \in \mathbb{Z}$ and $0 < x \leq 9$, $0 \leq y \leq 9$, $0 \leq z \leq 9$. The number xyz can be written as the expression $100x + 10y + z$.

The new number can be symbolically written as $zxyz$ or as $1000z + 100x + 10y + z$, which simplifies to $100x + 10y + 1001z$.

Seven times the desired number is $700x + 70y + 7z$. If we subtract 18 from it, the following must hold: $700x + 70y + 7z - 18 = 100x + 10y + 1001z$. We rearrange the equation into the form

$$600x + 60y = 994z + 18 \tag{1}$$

The left-hand side of the equation is divisible by ten, so the right-hand side must also be divisible by ten. We can modify the right-hand side as $994z + 18 = (990z + 10) + (4z + 8)$, so the number $4z + 8$ must end in zero.

If we substitute numbers $0, 1, \ldots, 9$ for z in the expression $4z+8$, the number $4z + 8$ ends in zero only for $z = 3$ or $z = 8$. However, for $z = 8$ we get from equation (1) $60x + 6y = 797$. No non-negative integers x, y less than 10 satisfy this equation. Therefore, z must be 3.

Substituting $z = 3$ into equation (1), we get $600x + 60y = 3000$, which simplifies to $10x + y = 50$. The numbers $10x$ and 50 are divisible by ten, so y must be 0, and therefore $10x = 50$. Hence, $x = 5$.

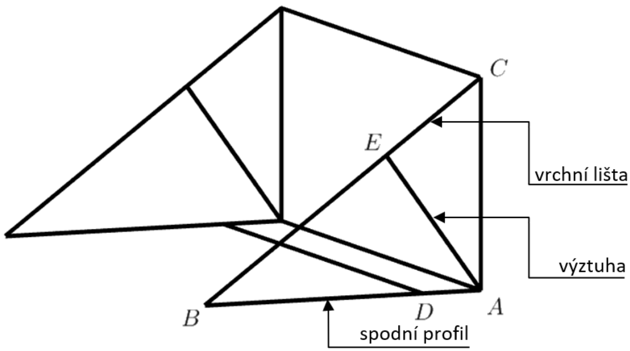
The desired activation code must contain the number 503.

Indeed, $503 \cdot 7 = 3503 + 18$.

Fotovoltaika

Zadání

Nosná kovová konstrukce fotovoltaického panelu se skládá z pravoúhlých trojúhelníků, které jsou zpevněny ještě tzv. výztuhou. Na obrázku jsou znázorněny body A, B, C, D, E, v nichž jsou umístěny hlavní šrouby trojúhelníkové části konstrukce.



Urči, jakou délku bude mít spodní profil konstrukce, jestliže je výztuha kolmá na vrchní lištu a zároveň platí, že $|CD| = |BD| = |BE| = 1$ m.

Řešení

Označme $|AD| = x$ a $|\sphericalangle ABC| = \varphi$. Jelikož trojúhelník DCB je rovnoramenný, je také $|\sphericalangle DCB| = \varphi$, a tedy $|\sphericalangle BDC| = 180° - 2\varphi$. Odtud $|\sphericalangle ADC| = 2\varphi$.

Z pravoúhlého trojúhelníku ABE platí, že

$$\cos\varphi = \frac{1}{1+x} \tag{1}$$

a z trojúhelníku ADC potom $\cos 2\varphi = \frac{x}{1} = x$.

Z věty o dvojnásobném úhlu

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos^2\varphi - (1 - \cos^2\varphi) = 2\cos^2\varphi - 1.$$

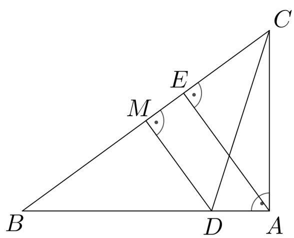
Takže $2\cos^2\varphi - 1 = x$, tedy

$$\cos^2\varphi = \frac{x+1}{2} \tag{2}$$

Porovnáním vztahů (1) a (2) dostáváme $\frac{x+1}{2} = \left(\frac{1}{x+1}\right)^2$, tedy $(x+1)^3 = 2$, odkud $x + 1 = \sqrt[3]{2}$.

Spodní profil tedy bude mít délku $\sqrt[3]{2}$ metru.

Alternativní řešení



Zkonstruujme bod M jako střed úsečky BC. Jelikož trojúhelník DCB je rovnoramenný, platí zároveň, že DM je kolmá na BC a trojúhelník MBD je také pravoúhlý.

Podle věty *uu* proto platí podobnost $\triangle ABC \sim \triangle EBA \sim \triangle MBD$, takže

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|AB|}{|BE|} = \frac{|BD|}{|BM|} = \frac{|BD|}{\frac{|BC|}{2}} = \frac{2}{|BC|} \tag{3}$$

Z Eukleidovy věty o odvěsně pro trojúhelník ABC platí

$$|AB|^2 = |BE| \cdot |BC| = |BC| \tag{4}$$

Ze vztahů (3) a (4) pak plyne $2 = |AB|^3$, takže $|AB| = \sqrt[3]{2}$.

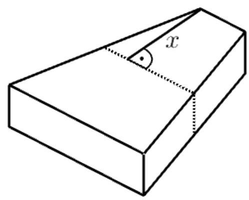
Mikuláš a sýr

Zadání

V neděli dopoledne maminka vařila boloňské špagety. Na pomoc si zavolala Mikuláše, který dostal na první pohled velmi jednoduchý úkol – nastrouhat sýr. Vytáhl proto z lednice blok sýra ve tvaru čtyřbokého hranolu, jehož podstavu tvořil rovnoramenný lichoběžník, a zeptal se, kolik sýra má nastrouhat. Jelikož odpověď „přiměřeně" ho neuspokojila, ptal se znova, kolik PŘESNĚ má sýra být.

Maminka si povzdychla a poprosila ho tedy precizněji, že má nastrouhat „přesně půlku hmotnosti bloku, a to tak, aby strouhal v rovině rovnoběžné s nejmenší obdélníkovou stěnou hranolu" (viz obrázek).

Mikuláš by samozřejmě mohl zjistit vážením, kolik sýra nastrouhat. Místo toho se ale zkoumavě na sýr zahleděl a rozhodl se, že nudné domácí práce pojme jako matematickou úlohu a vyřeší početně, kolik centimetrů sýra má ustrouhat. Změřil ještě, že lichoběžník tvořící podstavu hranolu má délky základen v poměru 3:1 a výška lichoběžníka je 11 cm.



Vypočítej s přesností na 2 desetinná místa, kolik centimetrů sýra má Mikuláš odstrouhat (v obrázku označeno x).

Řešení

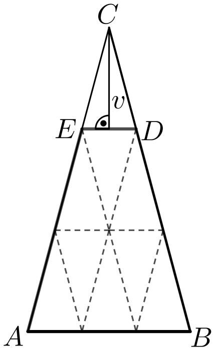
Úlohu stačí řešit pro obsah rovnoramenného lichoběžníku, který tvoří podstavu hranolu.

Označíme si vrcholy lichoběžníku A, B, D, E a doplníme jej na trojúhelník ABC (viz obr. 1). Obsah trojúhelníku EDC označíme jako S, jeho výšku na stranu ED označme v.

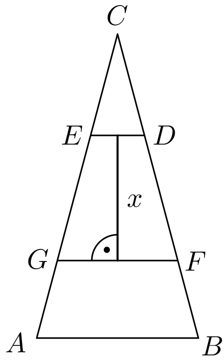
Je zřejmé, že obsah trojúhelníku ABC je $9S$ a zároveň $v = \frac{11}{2} = 5{,}5$ cm.

Tedy obsah lichoběžníka $ABDE$ je $8S$.

Pro nalezení délky x zvolíme na stranách AC a BC body F, G takové, že lichoběžníky $ABFG$ a $GFDE$ mají stejný obsah $\frac{8S}{2} = 4S$ (viz obr. 2).



Obr. 1



Obr. 2

Odtud pro obsahy trojúhelníků EDC a GFC platí $5S_{EDC} = S_{GFC}$, tedy $5 \cdot \dfrac{|ED| \cdot 5{,}5}{2} = \dfrac{|GF| \cdot (x + 5{,}5)}{2}$, neboli

$$\frac{|ED|}{|GF|} = \frac{x + 5{,}5}{5 \cdot 5{,}5}\ . \tag{1}$$

Jelikož $\triangle EDC \sim \triangle GFC$, platí také $\dfrac{|ED|}{5{,}5} = \dfrac{|GF|}{x + 5{,}5}$, tedy

$$\frac{|ED|}{|GF|} = \frac{5{,}5}{x + 5{,}5}\ . \tag{2}$$

Porovnáním (1) a (2) dostaneme po úpravě $(x + 5{,}5)^2 = 5 \cdot 5{,}5^2$, odkud

$$x^2 + 11x - 4 \cdot 5,5^2 = 0\ .$$

Z kořenů této kvadratické rovnice vyhovuje zadání úlohy kořen

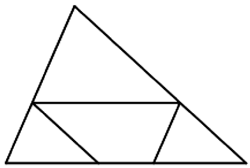
$$x = \frac{-11 + \sqrt{11^2 + 16 \cdot 5{,}5^2}}{2} \approx 6{,}80\ \text{cm}.$$

Mikuláš má odstrouhat asi 6,80 cm sýra.

Ozdobné keře

Zadání

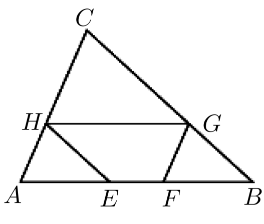
V přírodním parku byla na louce, která má tvar obecného trojúhelníku a jejíž celková plocha je 1 hektar, vysazena skupina ozdobných keřů. Keře vyplňují plochu tvaru lichoběžníku, jehož všechny vrcholy leží na stranách trojúhelníku. Každá ze stran lichoběžníku je rovnoběžná s některou ze stran trojúhelníku, kratší základna lichoběžníku leží na jedné ze stran trojúhelníku (viz ilustrativní obrázek).



Určete maximální možnou plochu lichoběžníku s vysázenými ozdobnými keři.

Řešení

Označme vrcholy trojúhelníku A, B, C a vrcholy lichoběžníku E, F, G, H (viz obrázek).



Označme dále $|AB| = c, |AC| = b, |BC| = a$.

Trojúhelníky AEH a ABC jsou podobné podle věty uu, stejně tak trojúhelníky HGC a ABC, FBG a ABC. Pak $|AH| = k \cdot b, |AE| = k \cdot c, |EH| = k \cdot a$, kde $k \in \mathbb{R},\ 0 < k < 1$.

Obsah trojúhelníku AEH je potom $k^2 \cdot S_{ABC} = k^2 \cdot 1 = k^2$.

Jestliže $|AH| = k \cdot b$, pak $|HC| = b - k \cdot b = (1-k) \cdot b$, tedy koeficient podobnosti pro trojúhelníky HGC a ABC je $(1-k)$ a obsah trojúhelníku HGC je $(1-k)^2$.

Jestliže $|CG| = a - k \cdot a$, pak $|GB| = k \cdot a$, tedy obsah trojúhelníku FBG je k^2.

Obsah lichoběžníku $EFGH$ pak vypočítáme odečtením obsahů trojúhelníků AEH, HGC a FBG od obsahu trojúhelníku ABC, tedy

$$S_{EFGH} = 1 - k^2 - (1-k)^2 - k^2 = -3k^2 + 2k\,.$$

Hledáme maximum kvadratické funkce s předpisem $y = -3k^2 + 2k$, např. pomocí úpravy na vrcholový tvar.

$$y = -3\left(k - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}$$

Hodnota funkce v maximu pro $k = \frac{1}{3}$ je $y = \frac{1}{3}$.

Maximální plocha lichoběžníku je tedy $\frac{1}{3}$ hektaru.

Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, příspěvková organizace

Sborník příkladů ze soutěže
Moravskoslezský matematický šampionát 2024

Ostrava 17. 10. 2024

Název	Moravskoslezský matematický šampionát 2024
Editor	Mgr. Jana Gajdušková
Vydavatel	Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, p. o. Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
Náklad	400 ks
Rozsah	28 stran
Vydání	první, 2024, revize 1
Tisk	Repronis s.r.o.
Doporučená cena	zdarma

Texty neprošly jazykovou úpravou.