

Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
příspěvková organizace

Moravskoslezský
matematický šampionát
2025

Sborník

Ostrava-Poruba
23. 10. 2025

Autoři a recenzenti:

RNDr. Ivana Breginová, Mgr. Jana Gajdušková,
Mgr. Lenka Hořenková Kucosová, Mgr. Petra Kňurová,
Mgr. Tomáš Krchňák, Mgr. Lenka Plášková,
Mgr. Lada Stachovcová, RNDr. Michal Vavroš, Ph.D.

Obsah

Úvodní slovo <i>Mgr. Jan Netolička</i>	5
Měsíc jako klíč k poznání <i>Mgr. Pavel Gabzdyl</i>	6
Kategorie ZŠ 9	
Záhadov	7
Cestování Evropou	11
MotoGP	13
Kategorie SŠ 3	
Běžecový ovál	16
Gold Coins	17
Galaktická dráha	18
Vitráž	20
Příklad pro kamarády	23

Úvodní slovo

Angličané používají frázi *elephant in the room* (slon v místnosti) pro něco očividného, velkého a důležitého, o čem všichni vědí, ale nikdo o tom nechce mluvit, protože je to trapné, citlivé nebo nepříjemné. Matematika je velká, důležitá a všichni ji mají na očích, ale je na tom jinak než onen příslovečný slon. O matematice se mluví, jenže (tak jako v dnešní době tolik jiných témat) rozděluje společnost. V případě matematiky není trapné, citlivé ani nepříjemné říct, že ji nemáte rádi.

Mám rád upřímné lidi a rád pojmenovávám věci tak, jak jsou. Slyšet od někoho, že nemá rád matematiku, považuji za zdravější, než o matematice vůbec nemluvit. Nemluvit o ní by znamenalo další krok k její záhubě.

Ještě lepší ale je mluvit o matematice pěkně. Zvednout hlavu, podívat se na Měsíc a užasnout nad tím, že už ho díky matematice nepovažujeme za vůz pronásledovaný vlkem ani za nástroj sloužící bohyni lovu. Že jsme na něm díky matematice stáli. . .

Mgr. Jan Netolička
ředitel Wichterlova gymnázia

Měsíc jako klíč k poznání

Anotace přednášky

Současní astronomové se Měsíci často vyhýbají – ruší jejich pozorování a nezapadá do výzkumných plánů. Přitom právě Měsíc sehrál v dějinách vědy zásadní roli: od prvních geometrických pokusů o určení vzdáleností a velikostí ve vesmíru, přes testování Einsteinovy obecné teorie relativity, až po současné kosmické projekty, které jej znovu staví do centra zájmu. Přednáška nabídne netradiční pohled na důležitou roli Měsíce v dějinách vědy.

*Mgr. Pavel Gabzdyl
popularizátor astronomie
Hvězdárna a planetárium Brno*

Záhadov

Zadání

Ve staré škole v obci Záhadov žil kdysi učitel matematiky pan Moudrý. Před svou smrtí ukryl poklad; dostane se k němu však jen ten, kdo zvládne zadané úkoly. Trojice deváťáků – Anička, Marek a Tomáš – se rozhodla poklad najít. V každé místnosti školy na ně čekala jedna matematická výzva.

1.

- a) Na zdi učebny našli první hádanku, kterou lehce rozluštili: *Najdi číslo, které když vynásobíš třemi a přičteš pět, dostaneš 26.*

Které je to číslo?

- b) V kabinetě se našel starý trezor. Na dvířkách byl papírek s touto hádankou:

- *kód obsahuje tři různé číslice*
- *jejich součet je 15*
- *jejich součin je 84*

Které číslice kód obsahuje?

- c) V knihovně stojí na stole tři truhličky. Vedle nich na hromadě leží 90 starých mincí. Pan Moudrý zanechal vzkaz, že je třeba rozdělit mince takto:

- *v první truhličce má být o deset mincí více než ve třetí*
- *ve druhé truhličce má být dvakrát více mincí než ve třetí*

Kolik mincí bude v jednotlivých truhličkách?

- d) Staré hodiny ve sborovně se zpozdí každou hodinu o 10 s.

Za kolik dní se zpozdí o půl hodiny?

2.

Anička, Marek a Tomáš úspěšně rozluštili první sadu úkolů. Tajné dveře ve školní chodbě se otevřely a vedly do sklepa, kde na ně čekala další série úloh.

a) Za padacími dveřmi je tajná místnost s číselným zámkem. Ten je možno otevřít pomocí kódu vytvořeného z číslic 2, 3, 5, 8, který splňuje podmínky:

- každá číslice je použita právě jednou
- vzniklé čtyřciferné číslo je dělitelné současně pěti a třemi

Vypiš všechna možná čísla. Kolik takových kódů existuje?

b) V tajné místnosti na dřevěném stole leží 100 mincí dvou druhů:

- zlatá mince má hodnotu 50 Kč
- stříbrná mince má hodnotu 20 Kč
- celková hodnota mincí dohromady je 3 200 Kč

Kolik je zlatých a kolik stříbrných mincí?

c) Délka sklepních chodeb v metrech je skryta v tomto výrazu:

$$4^3 \cdot \sqrt{9 \cdot (3^2 + 2^4)}$$

Jaká je délka chodeb?

d) Aby se dostali k cíli, musí deváťáci na školní zahradě přeběhnout lávku a oběhnout starý rybník. Anička vyběhne rychlostí 6 km/h. Marek za ní vyběhne o 1 minutu později a běží rychlostí 8 km/h.

Za jak dlouho (od svého startu) Marek Aničku dohoní? Uveď výsledek v minutách.

Naši deváťáci zvládli všechny výzvy a nakonec objevili poklad pana Moudrého. Snad se i vám podařilo jeho úlohy vyřešit.

Řešení

1a)

Hledané číslo najdeme snadno: od 26 odečteme pět, vydělíme třemi a získáme číslo 7.

Případně můžeme sestavit jednoduchou rovnici $3x + 5 = 26$, jejím řešením je $x = 7$.

1b)

Z prvočíselného rozkladu $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ dostáváme pro součin tří jednociferných dělitelů čísla 84 pouze možnosti $2 \cdot 6 \cdot 7$ a $4 \cdot 3 \cdot 7$. Z toho jen v prvním případě platí, že jejich součet je 15. Správný kód obsahuje číslice 2, 6, 7.

1c)

Označme počet mincí ve třetí truhličce x . Pak je počet mincí v první truhličce $x + 10$ a počet mincí v druhé truhličce $2x$. Pro celkový počet mincí tedy platí $x + 10 + 2x + x = 90$, odkud dostaneme $x = 20$.

Tedy v první truhličce bude 30 mincí, ve druhé 40 mincí a ve třetí 20 mincí.

1d)

Protože $0,5$ hodiny = 1800 sekund, zpoždění nastane za $1800/10 = 180$ hodin, neboli za $180/24 = 7,5$ dne.

Hodiny se zpozdí o půl hodiny za 7,5 dne.

2a)

Z dělitelnosti pěti vyplývá, že poslední číslicí bude 5. Dělitelnost třemi máme zaručenu ciferným součtem 18.

Pak dostáváme těchto šest možností: 2385, 2835, 3285, 3825, 8235, 8325

2b)

Úlohu můžeme vyřešit například užitím soustavy rovnic. Počet zlatých mincí označme z , počet stříbrných označme s . První rovnicí vyjádříme počet mincí, druhou rovnicí jejich celkovou hodnotu:

$$\begin{aligned} z + s &= 100 \\ 50z + 20s &= 3\,200 \end{aligned}$$

Z první rovnice vyjádříme $s = 100 - z$, dosadíme do druhé rovnice

$$50z + 20(100 - z) = 3\,200$$

Řešením této rovnice získáme počet zlatých mincí $z = 40$ a počet stříbrných mincí $s = 60$.

2c)

Upravíme zadaný výraz:

$$4^3 \sqrt{9 \cdot (3^2 + 2^4)} = 64 \sqrt{9 \cdot 25} = 64 \cdot 3 \cdot 5 = 960$$

Chodby jsou dlouhé 960 metrů.

2d)

Dráhy obou dětí jsou stejné, jen čas Marka (označme jej t) je kratší. Zpoždění 1 minuta je šedesátina hodiny.

Proto platí $8t = 6 \left(t + \frac{1}{60} \right)$, odtud $t = \frac{1}{20}$ hodiny, tedy 3 minuty.

Marek dožene Aničku za 3 minuty.

Cestování Evropou

Zadání

Čtyři kamarádi Ema, Simona, Martin a Jan se rozhodli poznat část Evropy. Plánují navštívit Vídeň, Benátky, Barcelonu a Paříž. Každý z nich se vydá právě do jednoho z těchto měst.

1. Před cestou si každý z kamarádů trénoval cizí jazyky. Poměr počtu naučených frází byl:
Ema : Jan : Martin : Simona = 4 : 3 : 5 : 2.
Celkem se naučili 280 frází. Kolik frází se naučil každý z nich?
2. V jednom městě si Simona půjčila kolo, aby projela zajímavou cyklostezku. V mapě bylo uvedeno: „Při rychlosti 15 km/h se zvládne trasa za 3 hodiny.“ Simona ale jela rychleji – průměrnou rychlostí 18 km/h. Za jak dlouho trasu projela?
3. Při své cestě každý z nich využil jiný dopravní prostředek – vlak, auto, letadlo, autobus. Víme, že:
 - Simona nenavštívila Vídeň ani Paříž.
 - Ten, kdo byl v Barceloně, cestoval vlakem.
 - Martin navštívil Benátky.
 - Jan ani Martin necestovali autem.
 - Ten, kdo letěl letadlem, navštívil Paříž.

Kdo z kamarádů cestoval letadlem?

4. Každý z kamarádů si na svou cestu připravil stejný rozpočet. Martin utratil 40 % svého rozpočtu, Jan čtvrtinu, Simona o 2 000 Kč méně než Jan a Ema o 1 000 Kč více než Martin. Dohromady všichni utratili 25 000 Kč.

Jaký měl každý účastník rozpočet?

Řešení

1.

Součet dílů je $4 + 3 + 5 + 2 = 14$, celkem frází je 280, tedy jeden díl je $280 : 14 = 20$ frází.

Ema se naučila 80 frází, Jan 60, Martin 100 frází a Simona 40.

2.

Použijme vzorec $s = v \cdot t$. Nejdříve vypočítáme celkovou dráhu $s = 15 \cdot 3 = 45$ km, pak čas při jiné rychlosti $t = 45 : 18 = 2,5$ hodiny.

Simona projela trasu za 2 hodiny a 30 minut.

3.

Toto je klasická úloha typu Zebra. Řešíme pomocí tabulky se jmény, městy a dopravními prostředky a postupně vyplňujeme podle zadaných údajů. Nebo stačí uvažovat: Simona nenavštívila Vídeň, ani Paříž, tedy byla buď v Barceloně nebo v Benátkách. Tam však byl Martin. Z toho vyplývá, že Simona navštívila Barcelonu a tedy cestovala vlakem. Autem nejel Jan, ani Martin, tedy autem jela Ema a musela být ve Vidni. Martin byl v Benátkách, takže neletěl letadlem, ale jel autobusem. Na Jana zbývá Paříž a letadlo.

Letadlem cestoval Jan.

4.

Neznámou částku označíme x . Podle zadání sestavíme rovnici

$$0,4x + 0,25x + (0,25x - 2\,000) + (0,4x + 1\,000) = 25\,000$$

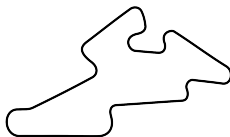
Její řešení je $x = 20\,000$.

Každý z kamarádů měl připraveno 20 000 Kč.

MotoGP

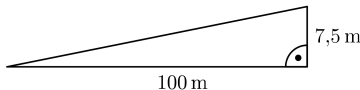
Zadání

Po krátké pauze se letos v červenci do Brna opět vrátila Velká cena MotoGP. Masarykův okruh ožil burácením motorů a napínavými souboji. Pojd' me se podívat na matematiku, která se za touto slavnou tratí skrývá.



1.

- a) Na okruhu je úsek délky 917 m, na kterém závodníci překonávají stoupání 7,5 % (stoupání 7,5 % představuje výškový rozdíl 7,5 m na **vodorovné** vzdálenosti 100 m, viz obrázek).



Vypočítejte výškový rozdíl tohoto úseku. Výpočty zaokrouhlete na dvě desetinná místa.

- b) Závodní okruh délky 5 403 km má celkem 14 zatáček. Představte si, že by měl tvar přesného kruhu. Jaký by byl potom průměr takového okruhu? Výsledek zaokrouhlete na celé metry.

2.

- a) V závodě na Masarykově okruhu (rok 2025) startuje 20 jezdců, mezi nimi Španěl Marc Márquez, šestinásobný mistr světa a hvězda MotoGP. Na stupně vítězů se dostanou tři nejrychlejší závodníci – rozdělí si zlatou, stříbrnou a bronzovou medaili. Kolika různými způsoby může být jednoznačně obsazeno medailové pořadí?
- b) Kolik z těchto pořadí obsahuje Marca Márqueze někde na stupních vítězů?

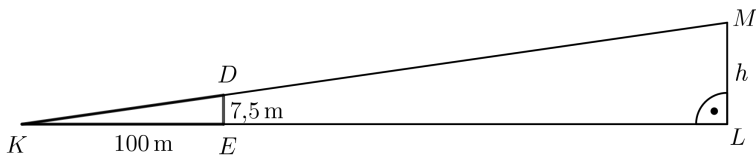
3.

- a) Při testování okruhu a zahřívání pneumatik účastníci závodu jedou v klidnějším rovnoměrném tempu (stálou rychlostí). Závodník A projíždí páskou START/CÍL každých 180 s, závodník B každých 200 s. Rozjeli se společně v 8:45:00 hod. V kolik hodin se znovu potkají na startovní čáře?
- b) Hlavní závod MotoGP se jel na 27 kol. Závodní pneumatika má hmotnost 9 kg, životnost 150 km a každým kolem se opotřebuje stejně (ztráta její hmotnosti po každém kole je pořád stejná, konstantní). Po závodě byl celkový úbytek hmotnosti pneumatiky 1,62 kg. Kolik procent své hmotnosti ztratila pneumatika po ujetí prvního okruhu a kolik procent byla ztráta při ujetí jen posledního okruhu hlavního závodu?

Řešení

1a)

Zjistíme nejprve, jak dlouhá je cesta při 7,5% stoupání na vodorovné vzdálenosti 100 m (neboli délka úsečky KD , viz obrázek).



$$|KD| = \sqrt{|KE|^2 + |ED|^2} = \sqrt{100^2 + 7,5^2} = 100,28 \text{ m}$$

V daném obrázku odpovídá hledanému výškovému rozdílu h délka strany LM . Délka strany KM je daný úsek 917 m.

Z podobnosti trojúhelníků KED a KLM určíme výškový rozdíl h :

$$\frac{h}{7,5} = \frac{|KM|}{|KD|} = \frac{917}{100,28} \Rightarrow h = \frac{917}{100,28} \cdot 7,5 = 68,58 \text{ m.}$$

Výškový rozdíl daného úseku představuje 68,58 m.

1b)

Ze vztahu pro obvod kruhu $o = \pi d$ vyjádříme d :

$$d = \frac{o}{\pi} = \frac{5\,403}{\pi} \doteq 1720 \text{ m. Průměr okruhu by byl 1720 m.}$$

2a)

Výsledky závodu mají jednoznačné pořadí, tedy na první místo je 20 možností, na druhé 19 a na třetí 18 možností, tj. $20 \cdot 19 \cdot 18 = 6840$. Celkem je 6840 možností různého pořadí závodníků na stupních vítězů.

2b)

Pokud by Marc Márqueze byl první, pak počet možností na druhém a třetím místě je $19 \cdot 18 = 342$ možností. Tentýž počet možností pak odpovídá pořadí, kdy bude Marc na druhém místě a totéž pak pro jeho bronzové umístění. Celkem máme $3 \cdot 342 = 1026$ možných pořadí v závodě, kdy bude Marc Márqueze stát někde na stupních vítězů.

3a)

Pro další společné setkání na startovní čáře určíme nejmenší společný násobek čísel 180 a 200, $n(180, 200) = 1800$. Na startovní čáře se mohou potkávat každých 1800 s, což představuje 30 minut.

Další společné projetí čáry START/CÍL bude v čase 9:15:00 hod.

3b)

Celkový úbytek hmotnosti pneumatiky rozpočítáme na jednotlivá kola, tedy $1,62 : 27 = 0,06$ kg.

Pro první kolo představuje opotřebení 0,06 kg ztrátu $0,06 : 0,09 = 0,67$ %, před posledním kolem má pneumatika hmotnost $9 - 26 \cdot 0,06$ kg = 7,44 kg. Ztráta 0,06 kg představuje $0,06 : 0,0744 = 0,81$ %.

Procentuální opotřebení jsou po prvním kole 0,67 % a po ujetí jen posledního kola 0,81 %.

Běžecový ovál

Zadání

Irena a Pavel běželi jedno kolo na školním čtyřistametrovém oválu. Vyrázili zároveň ze stejného místa, ale běželi opačnými směry. Irena dokončila kolo 27,2 sekundy poté, co se minuli, a Pavel 42,5 sekundy poté, co se minuli. Oba běželi konstantní rychlostí.

Jak dlouho trvalo Ireně, než uběhla celé kolo?

Řešení

Označme čas, za který Irena uběhla celé kolo, jako t . Pak čas, za který uběhl kolo Pavel, je $t + (42,5 - 27,2) = t + 15,3$.

Označíme-li rychlost Ireny v_I a rychlost Pavla v_P , potom zřejmě $v_I = \frac{400}{t}$
a $v_P = \frac{400}{t + 15,3}$.

Vzdálenosti, které uběhli poté, co se minuli, dávají dohromady 400 metrů, platí tedy

$$27,2 \cdot v_I + 42,5 \cdot v_P = 400,$$

neboli

$$27,2 \cdot \frac{400}{t} + 42,5 \cdot \frac{400}{t + 15,3} = 400.$$

Po zjednodušení dostáváme kvadratickou rovnici

$$t^2 - 54,4t - 416,16 = 0,$$

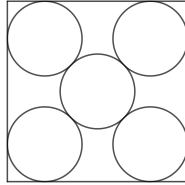
jejímž jediným kladným řešením je $t = 61,2$.

Irena uběhla celý běžecový ovál za 61,2 sekund.

Gold Coins

Problem

At the mint, gold coins with a radius of 1 cm are struck. For a special occasion, they want to prepare a square box into which 5 such coins will be placed (see picture).



Calculate the side length of this square box, assuming that the coins touch each other and also touch the walls of the box. Give the result in centimeters, rounded to two decimal places.

Solution

Let us denote the length of the desired side as x . The diagonal d of the square is equal to three diameters of the given circles plus two segments of length $\sqrt{2} - 1$ cm (from the Pythagorean theorem applied to a suitable part of the square). Therefore,

$$d = 6 + 2(\sqrt{2} - 1) = 4 + 2\sqrt{2}.$$

Since the diagonal d of a square with side length x is given by $d = x\sqrt{2}$, we obtain the equation

$$x\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2}.$$

Simplifying gives

$$x = \frac{4 + 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} + 4}{2} = 2 + 2\sqrt{2}.$$

Hence,

$$x = 2 + 2\sqrt{2} \doteq 4,83 \text{ cm.}$$

Therefore, the side length of the square box is approximately 4,83 cm.

Galaktická dráha

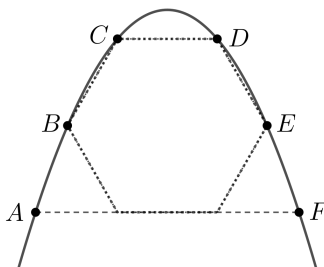
Zadání

V roce 5025 se v sektoru Aurion koná velkolepý Galaktický závod hvězdných lodí. Start závodu je u stanice A – *Aurion Prime*, největší orbitální plošiny v této části galaxie. Cílem je stanice F – *Fulgora Nexus*, energetická brána v blízkosti supernovy. Mezi nimi závodníci musí proletět přes čtyři kontrolní body B, C, D, E , které jsou rozmístěny v prostoru tak, že tvoří vrcholy pravidelného šestiúhelníku, jehož jedna strana leží na spojnici stanic A a F (viz obrázek).

Trať samotná kopíruje oblouk paraboly, aby lodě mohly využít gravitační prak hvězdy v centru soustavy.

Vzhledem k možnému použití warp pohonu se vzdálenosti měří ve světelných závodních jednotkách SJ – speciální jednotce určené jen pro potřeby závodu. Přímá vzdálenost mezi následujícími kontrolními body (tzn. sousedními vrcholy šestiúhelníku) je 2 SJ.

Určete přímou vzdálenost mezi stanicemi *Aurion Prime* a *Fulgora Nexus*.



Řešení

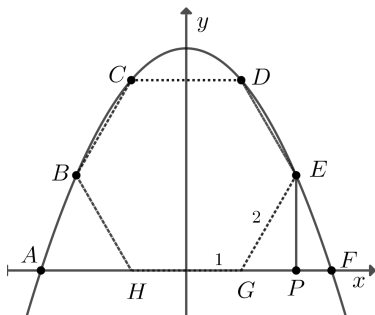
Označme G, H zbývající vrcholy šestiúhelníku a umístěme střed kartézské soustavy souřadnic do středu úsečky G, H .

Rovnici paraboly pak lze vyjádřit ve tvaru

$$y = ax^2 + c, \quad (1)$$

přičemž koeficienty a, c určíme pomocí souřadnic vhodných bodů, např. D a E .

Označme P patu kolmice vedené z bodu E na osu x (viz obrázek). Vzhledem k tomu, že $|\angle EGP| = 60^\circ$ ($180^\circ - |\angle HGE|$) a trojúhelník EGP je



pravoúhlý s délkou přepony 2, musí být $|GP| = 1$ a $|EP| = \sqrt{3}$.

Dostáváme tak souřadnice bodu $E[2, \sqrt{3}]$. Evidentně pak $D[1, 2\sqrt{3}]$. Dostáváme-li souřadnice těchto bodů do (1), dostaneme soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= 4a + c \\ 2\sqrt{3} &= a + c\end{aligned}$$

Odečtením rovnic a po úpravě dostaneme $a = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ a následně

$$c = 2\sqrt{3} - a = 7\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Rovnice paraboly je tedy $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + 7\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Body A, F jsou průsečíky paraboly s osou x , stačí proto najít řešení rovnice

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 + 7\frac{\sqrt{3}}{3},$$

kterými jsou $x_{1,2} = \pm\sqrt{7}$.

Vzdálenost mezi stanicemi A, F je tedy $2\sqrt{7}$ SJ.

Vitráž

Zadání

Při renovaci gotické katedrály se mistři sklenáři pustili do rekonstrukce skleněné vitráže¹, na jejíž výrobu bylo použito *pot metal glass*².

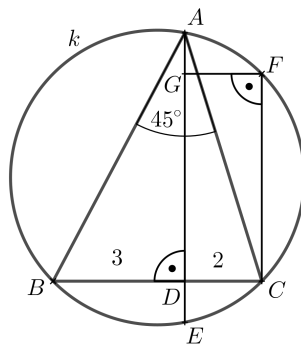
Vitráž sestávala mj. z kruhů, v nichž se nacházely sytě modré tabulky z kobaltového skla ve tvaru vepsaného ostroúhlého trojúhelníku. Úhel u jednoho z jeho vrcholů měl velikost 45° a olověná výztuž vedená z tohoto vrcholu kolmo na protější stranu ji rozdělovala na dva úseky o délce 3 cm a 2 cm.

Aby bylo možné objednat správné množství skla pro výrobu celé série těchto okének, potřebovali sklenáři znát plochu jednoho takového trojúhelníku. Vypočítejte jeho obsah.

Řešení

Řešení 1

Trojúhelník je vepsaný do kružnice k . Označme si jeho vrcholy A , B , C , přičemž úhel u vrcholu A má velikost 45° (viz zadání). Patu výšky z bodu A na stranu BC označme D . Průsečík polopřímky AD s kružnicí k označme E . Doplňme bod F tak, aby ležel na kružnici a $|\sphericalangle BCF| = 90^\circ$. Doplňme dále bod G tak, aby ležel na výšce AD a $|\sphericalangle CFG| = 90^\circ$ (viz obrázek).



Pak úhly BFC a BAC jsou obvodové úhly k témuž oblouku BC , mají tedy stejnou velikost 45° . Z toho plyne, že pravoúhlý trojúhelník BCF je rovnoramenný a platí $|FC| = |BC| = 5$. Čtyřúhelník $DCGF$ je evidentně obdélník, proto $|DG| = |FC| = 5$.

¹Vitráž – z franc. *vitrail* označuje okenní výplň složenou z barevných skleněných tabulek, které jsou spojeny olověnými pásky.

²*Pot metal glass* – sklo probarvené přímo při tavení, takže na rozdíl od skla s nátěrem se vyznačuje velmi trvanlivými a sytými barvami; některé barvy používané ve starších historických obdobích byly z důvodu vzácnosti materiálu použitého k obarvení extrémně nákladné (např. rubínové či kobaltové sklo).

Vzhledem k tomu, že $|DE| = |AG|$ (úseky na třetivě rovnoběžné s CF a kolmé k BC), dostáváme $|DE| = |AD| - 5$.

Můžeme nyní využít mocnost bodu D ke kružnici:

$$3 \cdot 2 = |DB| \cdot |DC| = |DA| \cdot |DE| = |DA| \cdot (|AD| - 5) = |AD|^2 - 5|AD|$$

Po úpravě řešíme kvadratickou rovnici $|AD|^2 - 5|AD| - 6 = 0$, jejímž kladným řešením je $|AD| = 6$.

Úsečka AD je zároveň výškou trojúhelníku ABC , můžeme tedy vypočítat jeho obsah:

$$S = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$$

Obsah trojúhelníku je 15 cm^2 .

Řešení 2

Úlohu můžeme řešit bez ohledu na kružnici opsanou trojúhelníku. Výztuž vitráže rozděljuje trojúhelník ABC výškou v na dva pravouhlé trojúhelníky, označme α vnitřní úhel jednoho z nich (viz obrázek)

Pak zřejmě platí

$$\frac{3}{v} = \operatorname{tg} \alpha \quad (1)$$

$$\frac{2}{v} = \operatorname{tg} (45^\circ - \alpha) \quad (2)$$

Ze vztahů (1) a (2) dostáváme

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{3} = \frac{\operatorname{tg} (45^\circ - \alpha)}{2} \quad (3)$$

Užitím rozdílového vzorce pro $\operatorname{tg} (x - y)$ můžeme nahradit výraz $\operatorname{tg} (45^\circ - \alpha)$ následovně:

$$\operatorname{tg} (45^\circ - \alpha) = \frac{\operatorname{tg} 45^\circ - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} 45^\circ \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$$

Dosazením do (3) dostáváme rovnici s neznámou α

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$$

kteřou můžeme pomocí substituce $\operatorname{tg} \alpha = x$ zjednoduřit na tvar

$$\frac{x}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x}$$

Dalšími úpravami pak dostaneme kvadratickou rovnici $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Vzhledem k tomu, že $\alpha \in (0; 45^\circ)$, zajímá nás pouze kladné řešení získané kvadratické rovnice, a tím je $x = \frac{1}{2}$. Zpětným dosazením do substitučního vztahu tedy $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$.

Nyní již můžeme hodnotu $\operatorname{tg} \alpha$ dosadit do vztahu (1), čímž dostaneme

$$\frac{3}{v} = \frac{1}{2}, \text{ odkud } v = 6.$$

Stejně jako v předchozím případě tedy můžeme vypočítat obsah daného trojúhelníku:

$$S = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15 \text{ cm}^2$$

Příklad pro kamarády

Zadání

Jája a Pája, dva nerozluční kamarádi, se moc rádi zabývají úlohami o dělitelnosti. Jednoho dne objevili příklad, jenž je okamžitě zaujal. Zadání znělo takto:

„Najděte všechna přirozená čísla n , pro která je číslo $5^n - 3^n + 2$ dělitelné sedmi.“

Oba chlupci se na chvíli zamysleli a pak se s chutí pustili do řešení daného problému.

Najděte tato přirozená čísla a určete, co pro ně platí.

Řešení

Pro přehlednost sestavme tabulku zbytků při dělení čísel 3^n , 5^n , $5^n - 3^n + 2$ sedmi.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
3^n	3	2	6	4	5	1	3	2	6	4	5	1	3	...
5^n	5	4	6	2	3	1	5	4	6	2	3	1	5	...
$5^n - 3^n + 2$	4	4	2	0	0	2	4	4	2	0	0	2	4	...

Snadno si lze rozmyslet, že šestice zbytků ve všech třech řádcích se dále periodicky opakuje.

Vidíme, že hledaná přirozená čísla n jsou čísla **4** a **5**, dále pak by to byla čísla **10** a **11**, **16** a **17**, atd.

Jsou to právě ta čísla, která při dělení šesti dávají zbytek 4 nebo 5, tj. čísla tvaru $n = 6k + 4$ a $n = 6k + 5$, kde $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, příspěvková organizace

**Sborník příkladů ze soutěže
Moravskoslezský matematický šampionát 2025**

Ostrava 23. 10. 2025

Název	Moravskoslezský matematický šampionát 2025
Editor	Mgr. Jana Gajdušková
Vydavatel	Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, p. o. Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
Náklad	420 ks
Rozsah	24 stran
Vydání	první, 2025, revize 1
Tisk	Printo, spol. s r.o.
Doporučená cena	zdarma

Texty neprošly jazykovou úpravou.