Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
příspěvková organizace

Moravskoslezský matematický šampionát 2019

Sborník

Ostrava-Poruba
24. 10. 2019

Organizační výbor

PaedDr. Antonín Balnar, Ph.D.	hlavní organizátor
Mgr. Jana Gajdušková	odborný matematický dohled
Mgr. Lada Stachovcová	technická podpora

Autoři a recenzenti

RNDr. Ivana Breginová, RNDr. Eva Davidová, Mgr. Jana Gajdušková,

Mgr. Petra Kňurová, Mgr. Tomáš Krchňák, Mgr. Lenka Plášková,

Mgr. Marie Štípalová, RNDr. Michal Vavroš, Ph.D.

Překlad do anglického jazyka

Mgr. Lada Stachovcová

Obsah

Úvodní slovo

Lidé chtějí vědět spoustu věcí: jaké bude zítra počasí, co bude k večeři, jestli zítra bude písemka, co bude umět nový iPhone, proč je přítelkyně naštvaná nebo kde mají (sakra) tu druhou ponožku. Kdybyste jim ale nechali možnost dozvědět se jen jedinou věc, jsem přesvědčený, že by se jejich otázky mnohem víc blížily něčemu jako: *Jaký je smysl života?* nebo *Jak funguje vesmír?*

Obrovské poptávky po odpovědích lidé úspěšně využívají a mnozí se odpovídáním na ně úspěšně živí. Na otázky o počasí odpovídají meteorologové, motivaci naštvané přítelkyně vysvětlují psychologové, ztracené ponožky zase ufolog nebo psychiatr. Panuje mezi nimi nepsaná dohoda, že se nemíchají do sféry zájmu ostatních. To ale neplatí pro témata jako smysl života či fungování vesmíru. Tady jako by ještě nebylo pískoviště jasně rozdělené. Religionisté, kosmologové, filozofové, všichni se přetahují o právo vysvětlit nám, jak svět vlastně funguje a proč, přestože to nikdo z nich neví.

Jen jedna skupina lidí stojí opodál a potutelně se usmívá. Umí totiž odpovědět vždy. Není to proto, že by znali odpověď. Je to proto, že umí otázku přeložit do univerzálního jazyka. Do jazyka, jaký lidstvo hledá od doby, kdy došlo ke zmatení jazyků. Do jazyka, který umožňuje všem ostatním najít si odpověď sám, protože zcela jasně definuje zadání. Je jen otázkou času, kdy někdo tento jazyk použije k tomu, aby položil tu správnou otázku, a někdo jiný s jeho pomocí odpoví. Smekám před všemi, kteří se tomuto jazyku učí, kteří se umí ptát a umí hledat odpovědi, jež jsou jasné a nezpochybnitelné. Smekám před matematiky.

Mgr. Jan Netolička
ředitel Wichterlova gymnázia

Je Mensa plná hlupáků?

Abstrakt přednášky

Jedněmi z hezkých a nesmírně důležitých matematických objektů jsou posloupnosti. Pomocí posloupností (a jejích limit) lze dát přesný smysl i takovým pojmům, jako jsou například spojitost, derivace a integrály, bez kterých si těžko lze představit (přesněji: bez kterých si snad ani nelze představit) moderní matematiku a její aplikace.

Kromě užitečnosti jsou posloupnosti navíc samy o sobě dost zábavné a zajímavé a lze si na nich trénovat důvtip a matematické myšlení.

V přednášce si ukážeme řadu zajímavých posloupností a prozradíme i řešení několika zásadních problémů (třeba: existuje mocnina dvojky začínající devítkou?). A povíme si i o tom, jak se lze nedostat do Mensy.

Na závěr anotace dodejme, že přednášející se na přednášku velmi těší a hodlá si ji užít.

prof. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.
Katedra aplikované matematiky, FEI VŠB-TU Ostrava

Klárka

Zadání

a) Klárka má narozeniny. Do školy pro spolužáky přinesla 3 druhy bonbonů – 112 ovocných, 196 karamelových a 252 čokoládových a připravila každému spolužákovi jednu hromádku. Bonbony spravedlivě rozdělila tak, aby v každé hromádce byl od každého druhu nejvyšší možný počet a všechny hromádky byly stejné. Kolik hromádek mohla takto maximálně připravit pro své spolužáky a kolik bonbonů daného druhu dala do jedné hromádky?

b) Klárka má narozeniny ve stejný den jako její otec. Kolik let mají oba dohromady, jestliže je otci v tento den právě třikrát více let než Klárce a zároveň platí, že je o 22 let starší než Klárka?

c) Ve škole si Klárka dala závod v běhu se svými spolužáky. Do cíle doběhli závodníci takto: Jana daleko před Michalem, Klárka těsně před Vaškem, Jana hned za Zdeňkem, Sebastian dvě místa před Danou, Lenka právě za Sebastianem, Dana těsně před Michalem a Klárka dvě místa za Zdeňkem. Jaké bylo pořadí Klárky a jejich spolužáků?

d) Ze školy jde Klárka rychlostí 4 km/h a cesta jí trvá 25 minut. Dnes vyšla v 15 hodin 10 minut. Po 10 minutách chůze potkala kamarádku Věrku, se kterou se zastavila a 5 minut si povídala. V kolik hodin dorazila domů, jestliže zbytek cesty šla rychlostí 6 km/h?

Řešení

a)

Pro maximální počet hromádek hledáme největšího společného dělitele čísel 112, 196, 252. Provedeme prvočíselný rozklad těchto čísel:

$112 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7, 196 = 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7, 252 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$ a na jeho základě určíme největšího společného dělitele

$$D(112, 196, 252) = 2 \cdot 2 \cdot 7 = 28.$$

Maximální počet hromádek se stejným počtem bonbonů daného druhu je 28.

Rozdělíme bonbony stejného druhu na dané hromádky:

$$112 : 28 = 4,\ 196 : 28 = 7,\ 252 : 28 = 9.$$

Klárka pro své spolužáky připravila 28 hromádek, v každé hromádce byly 4 ovocné, 7 karamelových a 9 čokoládových bonbonů.

b)

Označme neznámý věk Klárky x. Podle informací o věku otce a Klárky sestavíme rovnici

$$x + 22 = 3x.$$

Řešením této rovnice je $x = 11$.

Klárce je v tento den 11 let, otci je 33 let a dohromady mají 44 let.

c)

Postupným rozmístěním jmen dle zadání na pomyslnou časovou osu určíme následující pořadí v cíli: 1. Zdeněk, 2. Jana, 3. Klárka, 4. Vašek, 5. Sebastian, 6. Lenka, 7. Dana a 8. Michal.

d)

Nejprve si určíme, jak je dlouhá cesta Klárky ze školy domů. Použijeme známý vztah $s = v \cdot t$, tedy $s = 4 \cdot \frac{25}{60} = \frac{5}{3}$ km. Za prvních 10 minut Klárka ušla $s = 4 \cdot \frac{10}{60} = \frac{2}{3}$ km. Po setkání s Věrkou jí zbývá ujít $\frac{5}{3} - \frac{2}{3} = \frac{3}{3} = 1$ km. Tento 1 km šla rychlostí 6 km/h, tedy ho urazila za čas $t = \frac{s}{v} = \frac{1}{6}$ h $= 10$ minut. Klárka dorazila domů v 15 hodin 35 minut.

Jiné řešení:

Klárka po deseti minutách chůze potkala v 15 hodin a 20 minut kamarádku a zdržela se s ní 5 minut. Původní rychlostí by jí cesta trvala ještě 15 minut. Tuto druhou část cesty však šla rychleji. Z nepřímé úměrnosti lze určit potřebný čas na zvládnutí zbývajícího úseku:

4 km/h … 15 min

6 km/h … t min

$t = (4 : 6) \cdot 15 = 10$ min. Zbylou část cesty domů Klárka ujde za 10 min a přijde v 15 hodin 35 minut.

Karlovy prázdniny

Zadání

a) Karel pobýval letos v červenci deset dní v Anglii. Musel se rychle zorientovat v cenách i ve vzdálenostech. Ve Velké Británii se platí britskou librou neboli librou šterlinků, jedna libra má 100 centů. Kurz byl v červenci 28,4 Kč za jednu libru. Vzdálenosti se v Anglii měří v mílích, 1 míle je 1 609 m. Karel chtěl zajet autem z Londýna do Cambridge, což je 62 mil. Kolik platil kartou v českých korunách na benzínové pumpě, jestliže načerpal přesně benzín na cestu tam a zpět, auto mělo průměrnou spotřebu 6,8 l/100 km a cena jednoho litru byla 1,289 GBP (britských liber)?

b) V druhé půli července se Karel rozhodl vymalovat vesele sestře její pokoj. Koupil tři barvy: žlutou, oranžovou a červenou. V pokoji jsou 4 stěny, ve dvou stěnách je výklenek pro okno, ve třetí stěně jsou dva výklenky, jeden pro dveře a jeden pro postel, čtvrtá stěna je bez výklenku. Strop i výklenky vymaloval bílou. Kolik měl Karel možností pro vymalování stěn pokoje všemi třemi barvami tak, aby nebyly dvě stejně barevné stěny vedle sebe?

c) V srpnu navštívil Karel včelařské muzeum v Chlebovicích. Zjistil spoustu zajímavostí o včelách, jejich životě a chovu. Nejvíce ho zaujalo stavění šestibokých buněk, do kterých včely ukládají med a pyl a ve kterých také probíhá vývoj larev. Dospělá včela potřebuje prostor o průměru 5,3 mm, což je zároveň vzdálenost protějších stěn buňky. Hloubka buňky je 12 mm. Počet buněk v plástu je asi 400 na 1 dm^2 a velikost obdélníkového základu plástu, který včelaři pro usnadnění včelám do úlů dávají, je 39×17 cm. Kolik kilogramů medu může být v jednom plástu, jestliže včely dostaví buňky tvaru šestibokých hranolů po obou stranách obdélníkového plástu a naplní je medem, jehož hustota je 1 417,1 kg/m^3?

Řešení

a)

Potřebujeme benzín na dvě cesty, tedy na 124 mil. V přepočtu je to pak 199,516 km.

Při spotřebě 6,8 l/100 km je tedy nutné koupit asi 13,567 litrů benzínu. Za toto množství zaplatíme 17,488 liber, což je v daném kurzu přibližně 496,66 Kč.

b)

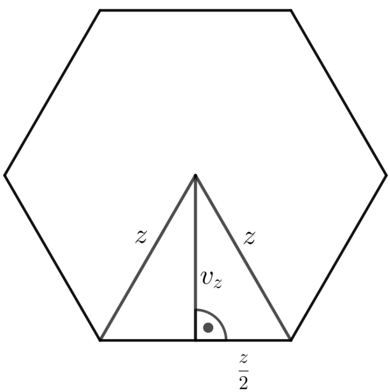
Očíslujme si barvy: žlutá 1, oranžová 2, červená 3. Pak možné omalování stěn můžeme „zakódovat“ jako uspořádanou čtveřici složenou ze tří prvků, kde nesmí stát stejné prvky vedle sebe, ani nesmí být stejný prvek první a zároveň poslední ve čtveřici. Takových možností lze najít 12:

1213, 1312, 1323, 1232, 2123, 2321, 2131, 2313, 3132, 3231, 3212, 3121

c)

Nejprve je třeba vypočítat objem jedné buňky, tzn. pravidelného šestibokého hranolu, u kterého známe průměr kružnice vepsané podstavě, 5,6 mm, (poloměr je tedy $r = v_z = 2{,}65$ mm) a výšku hranolu ($v = 12$ mm).

Ve vzorci pro objem $V = S_p \cdot v = 6 \cdot \dfrac{z \cdot v_z}{2} \cdot v = 6 \cdot \dfrac{z \cdot 2{,}65}{2}$ zbývá tedy jedna neznámá z, kterou lze dopočítat například pomocí Pythagorovy věty z pravoúhlého trojúhelníku (viz obrázek).



$$v_z^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^2 = z^2$$

Tuto rovnost dále upravujeme:

$$v_z^2 + \frac{z^2}{4} = z^2 \Rightarrow 4v_z^2 + z^2 = 4z^2 \Rightarrow 4v_z^2 = 3z^2 \Rightarrow z^2 = \frac{4}{3}v_z^2 \Rightarrow z = \frac{2}{\sqrt{3}}v_z.$$

Tedy z je asi 3,06 mm.

Po dosazení do vzorce vyjde objem jedné buňky asi 291,92 mm^3.

Na jednom decimetru čtverečním plástu je jich 400 a plocha po obou stranách plástu je $3{,}9 \cdot 1{,}7 \cdot 2 = 13{,}26$ dm^2.

Celkový objem medu by pak byl 1 548 342,848 mm^3, to je asi $0,00155$ m^3. Takové množství medu by mělo hmotnost

$$m = \rho \cdot V = 1417{,}1 \cdot 0{,}0015 = 2{,}194 \text{ kg}.$$

Elektromobil

Zadání

Pan Zelený se chystá koupit nové auto. Rozhoduje se mezi automobilem s benzínovým pohonem za 400 000 Kč a elektromobilem s pořizovací cenou 900 000 Kč.

Raději by investoval do koupě elektromobilu.

(údaje zjednodušeny, ostatní náklady a okolnosti provozu obou druhů automobilů zanedbáme)

a) Elektromobil vyžaduje při zakoupení větší investici, která se majiteli vrátí po větším počtu ujetých kilometrů. Vypočítejte, kolik kilometrů musí pan Zelený ujet, aby se investice do elektromobilu vyrovnala nákladům na provoz benzínového auta. Předpokládejte průměrnou spotřebu benzínového auta 7 litrů na 100 km a cenu benzínu 35 Kč za litr.

   Pan Zelený počítá s náklady na dobíjení baterie elektromobilu 80 Kč na 100 km. Výsledek zaokrouhlete na tisíce kilometrů.

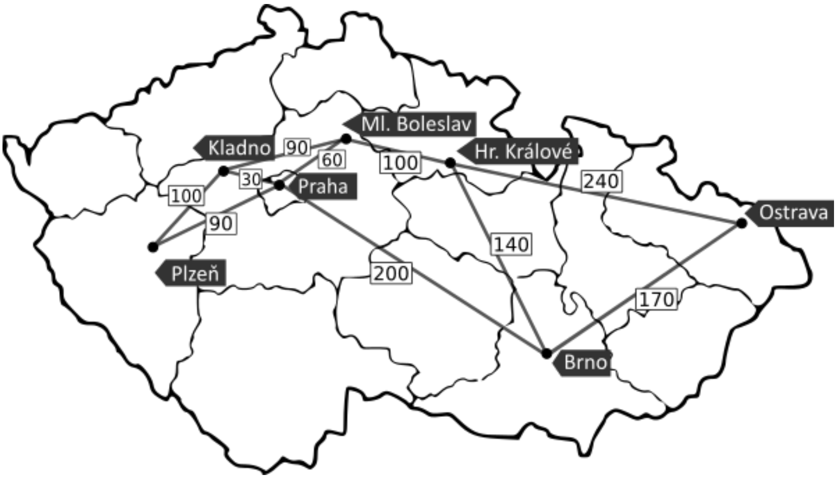
b) Naplánujte cestu elektromobilem z Ostravy tak, aby automobil navštívil Brno, Plzeň a Kladno (v libovolném pořadí) a cestu ukončil opět v Ostravě. Zvolte nejkratší trasu. Nabitá baterie umožní dojezd 270 km, při cestě se využívají rychlodobíjecí stanice, kde dobití baterie trvá asi 30 minut. Použijte následující zjednodušenou mapku rychlodobíjecích stanic. Předpokládáme průměrnou rychlost auta 90 km/h.

   Jaké bude pořadí navštívených míst?

   Jaká je celková délka této trasy?

   Kolikrát bude muset elektromobil dobíjet?

   Jak dlouho bude cesta trvat? Zaokrouhlete na hodiny.



Řešení

a)

Rozdíl pořizovacích cen mezi oběma auty činí 500 000 Kč.

Cena benzínu na 100 km je $7 \cdot 35$ Kč = 245 Kč.

Na 100 km je tedy rozdíl v uvedených nákladech mezi benzínovým autem a elektromobilem $245 - 80 = 165$ Kč. Rozdíl na jeden kilometr potom bude $165 : 100 = 1{,}65$ Kč.

Hledaný počet kilometrů pak získáme jako podíl rozdílu pořizovacích cen a rozdílu v nákladech na jeden kilometr $500\,000 : 1{,}65 = 303\,030{,}303$ km.

Investice do nákupu elektromobilu se tedy vyrovná nákladům na benzín po ujetí 303 000 kilometrů.

b)

Při hledání optimálního pořadí navštívených míst najdeme dvě trasy shodné délky, z mapky pak vyčteme délky jednotlivých úseků trasy:

- Ostrava–Brno–Kladno–Plzeň–(Praha)–Brno–Ostrava
  $170 + 230 + 100 + 90 + 200 + 170 = 960$ km
- Ostrava–Brno–(Praha)–Plzeň–Kladno–Brno–Ostrava
  $170 + 200 + 90 + 100 + 230 + 170 = 960$ km

Tedy hledaná nejkratší trasa je dlouhá 960 km.

Vzhledem k danému přehledu rychlodobíjecích stanic a délkám úseků mezi nimi jsou potřebné čtyři zastávky na nabíjení.

Čas jízdy získáme vydělením délky trasy a průměrné rychlosti auta

$$960 : 90 = 10{,}\overline{6}\ \text{hodiny}.$$

Odtud celkový čas cesty bude 11 hodin + 2 hodiny nabíjení = 13 hodin.

Divisors

Problem

Find the smallest natural number k for which the products $384 \cdot k$ and $2\,592 \cdot k$ have the same number of divisors.

Solution

To solve the problem we will use prime decompositions of given numbers:

$$384 = 2^7 \cdot 3\ , \quad 2\,592 = 2^5 \cdot 3^4.$$

Thus the searched number k should be of the form

$$k = 2^a \cdot 3^b \cdot c,$$

where c is a natural number not divisible by two and three and a, b are nonnegative integers.

Then $384 \cdot k = 2^{a+7} \cdot 3^{b+1} \cdot c$.

To determine the number of divisors we can use the Gauss's Theorem about a number of divisors of a natural number which is equal to the product of exponents in its prime decomposition, each increased by 1.

Then the number of divisors of the product $384 \cdot k$ should be $(a+8) \cdot (b+2) \cdot d$, where d is the number of divisors of c.

Similarly we get $2\,592 \cdot k = 2^{a+5} \cdot 3^{b+4} \cdot c$.

The number of divisors of this product is $(a+6) \cdot (b+5) \cdot d$.

Since k should be the smallest natural number with a given property, then $c = d = 1$.

The following must hold:

$$(a+8) \cdot (b+2) = (a+6) \cdot (b+5),$$

so that the number of divisors of the given products is the same.

Simplifying the equation we get

$$2b = 3a + 14.$$

The smallest natural number k is for $a = 0, b = 7$.

Finally, the products $384 \cdot k$ and $2\,592 \cdot k$ have the same number of divisors for $k = 3^7 = 2\,187$. (Then the number of these divisors is equal to 72.)

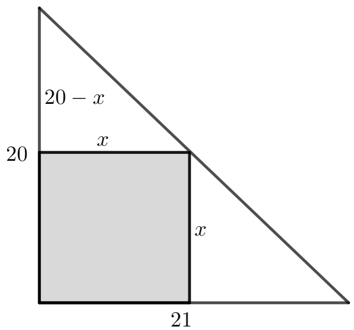
Čtverce vepsané trojúhelníku

Zadání

Do pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami délek 20 cm a 21 cm vepište dvojím způsobem čtverec. Strana čtverce C_1 má délku x a leží na odvěsně trojúhelníku. Strana čtverce C_2 má délku y a leží na přeponě trojúhelníku. Vypočtěte poměr délek $\frac{x}{y}$. Výsledek zapište zlomkem v základním tvaru.

Poznámka: Všechny vrcholy vepsaného čtverce musí ležet na stranách trojúhelníku.

Řešení



Do trojúhelníku vepíšeme čtverec C_1:

Z podobnosti trojúhelníků plyne

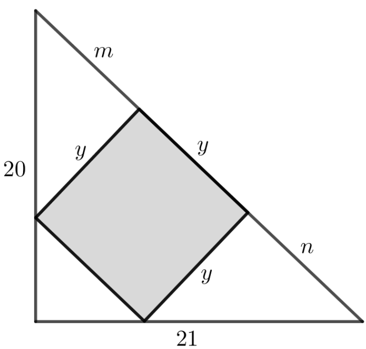
$$\frac{20-x}{x} = \frac{20}{21}.$$

Po úpravě

$$420 - 21x = 20x,$$

tedy $x = \frac{420}{41}$.

Do trojúhelníku vepíšeme čtverec C_2:



Délka přepony je $\sqrt{20^2 + 21^2} = 29$.

Pro úseky m, y, n (viz obrázek) na přeponě platí:

$$m + y + n = 29. \qquad (1)$$

Úseky m a n vypočteme z podobnosti trojúhelníků:

$$\frac{m}{y} = \frac{20}{21}, \text{ odkud } m = \frac{20}{21}y.$$

Obdobně: $\frac{n}{y} = \frac{21}{20}$, odkud $n = \frac{21}{20}y$.

Po dosazení do (1) dostáváme vztah pro neznámou y: $\dfrac{20}{21}y + y + \dfrac{21}{20}y = 29$ a rovnici vyřešíme:

$$400y + 420y + 441y = 12180$$

$$1261y = 12180, \text{ tedy } y = \frac{12180}{1261}.$$

Hledaný poměr délek stran čtverců je

$$\frac{x}{y} = \frac{420}{41} \cdot \frac{1261}{12180} = \frac{1 \cdot 1261}{41 \cdot 29} = \frac{1261}{1189}.$$

Cyklistický závod

Zadání

Trasa silničního závodu cyklistů z A do B a zpět obsahovala úseky vedoucí do kopce, po rovině i z kopce. Zpáteční trasa z B do A vedla po stejné silnici jako z A do B.

Průměrná rychlost závodníka Petra byla po rovině 39 km/h, na úsecích do kopce 26 km/h a na úsecích z kopce 78 km/h. Cesta z A do B mu trvala 3 hodiny, zpáteční cesta z B do A mu trvala 4 hodiny. Vypočtěte z těchto údajů, jaká je vzdálenost míst A a B.

Řešení

Označme x souhrnnou délku úseků vedoucích od A do B po rovině. Dále označme y souhrnnou délku úseků vedoucích ve směru z A do B do kopce a z souhrnnou délku úseků vedoucích ve směru z A do B z kopce. Vzdálenost míst A a B po silnici bude tedy $x + y + z$.

Pro celkový čas cyklisty na cestě z A do B platí:

$$\frac{x}{39} + \frac{y}{26} + \frac{z}{78} = 3. \tag{1}$$

Na zpáteční cestě se úseky, které v původním směru byly do kopce, stanou úseky vedoucími z kopce. Bude tedy platit:

$$\frac{x}{39} + \frac{y}{78} + \frac{z}{26} = 4. \tag{2}$$

Sestavili jsme dvě rovnice o třech neznámých, což by mohlo vést k závěru, že nemáme dost informací pro vyřešení úlohy. Ale naším úkolem není určit délky jednotlivých úseků, ale hodnotu součtu $x + y + z$.

Sečteme rovnice (1) a (2). Dostáváme:

$$\frac{2}{39}x + \left(\frac{1}{26} + \frac{1}{78}\right) y + \left(\frac{1}{78} + \frac{1}{26}\right) z = 7.$$

Po úpravě:

$$\frac{2}{39}x + \frac{2}{39}y + \frac{2}{39}z = 7.$$

Odtud $x + y + z = \dfrac{7 \cdot 39}{2} = 136{,}5.$

Silniční vzdálenost míst A a B je tedy 136,5 km.

Poznámka k řešení:

Úloha je řešitelná v důsledku vhodně zvoleného zadání rychlostí, které jsou voleny tak, aby doba jízdy na svažitých úsecích na trase tam i zpět byla stejná jako po rovině na úseku stejné délky. To nastane v případě, že rychlost po rovině je harmonickým průměrem rychlostí do kopce a z kopce, což nyní ověříme:

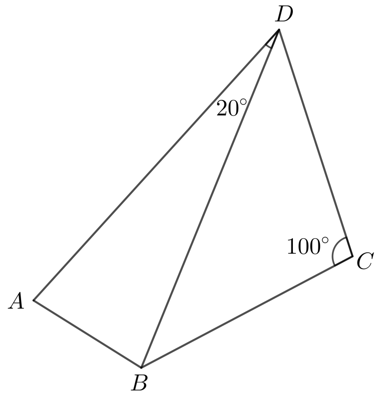
$$H(26, 78) = \frac{2}{\frac{1}{26} + \frac{1}{78}} = \frac{2}{\frac{2}{39}} = 39.$$

Harmonický průměr rychlostí 26 km/h a 78 km/h je vskutku roven 39 km/h.

Čtyřúhelník

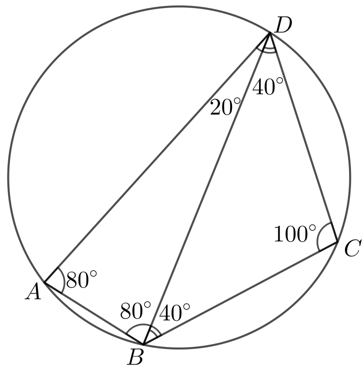
Zadání

Je dán čtyřúhelník $ABCD$, kde AB a BD jsou základny rovnoramenných trojúhelníků ABD a DBC, vnitřní úhly mají velikost $|\sphericalangle ADB| = 20^\circ$ a $|\sphericalangle BCD| = 100^\circ$ (viz obrázek). Vypočítejte součin $|AC| \cdot |BD|$, je-li obsah čtyřúhelníku $ABCD$ roven jedné.



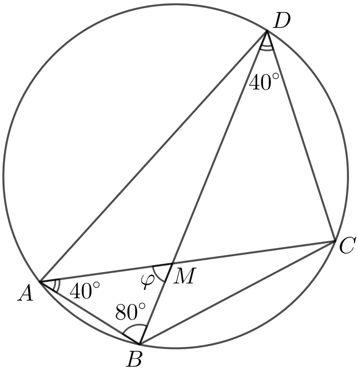
Řešení

Nejprve dopočítáme vnitřní úhly v trojúhelnících ABD, DBC a čtyřúhelníku $ABCD$.



Tímto zjistíme, že pro vnitřní úhly čtyřúhelníku platí následující rovnosti: $\alpha + \gamma = 80° + 100° = \beta + \delta = 120° + 60° = 180°$. Tedy čtyřúhelník $ABCD$ je tětivový.

Vyznačme úhlopříčky AC, BD a jejich průsečík označme M.



Vzhledem k tomu, že úhly CDB a CAB jsou obvodové úhly příslušné ke kratšímu oblouku BC a tedy mají stejnou velikost, můžeme vypočítat ostrý úhel φ u průsečíku úhlopříček M; $\varphi = 60°$.

Pracujme teď s obsahem čtyřúhelníku. Pokud nepoužijeme přímo vztah pro výpočet obsahu obecného čtyřúhelníku $S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| \cdot \sin\varphi$, můžeme k němu jednoduše dojít pomocí obsahů trojúhelníků ABM, BCM, CDM a DAM následovně:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABM} + S_{\Delta BCM} + S_{\Delta CDM} + S_{\Delta DAM} =$$
$$= \tfrac{1}{2}|AM| \cdot |BM| \cdot \sin\varphi + \tfrac{1}{2}|BM| \cdot |CM| \cdot \sin(180° - \varphi) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}|CM| \cdot |DM| \cdot \sin\varphi + \tfrac{1}{2}|DM| \cdot |AM| \cdot \sin(180° - \varphi)\,.$$

S využitím postupného vytýkání a toho, že $\sin\varphi = \sin(180° - \varphi)$, můžeme daný vztah upravit takto:

$$S = \tfrac{1}{2}|BM| \sin\varphi \cdot (|AM| + |CM|) + \tfrac{1}{2}|DM| \sin\varphi \cdot (|CM| + |AM|) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\sin\varphi\,(|AM| + |CM|) \cdot (|BM| + |DM|) = \tfrac{1}{2}|AC| \cdot |BD| \cdot \sin\varphi.$$

Pak platí $S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| \cdot \sin 60° = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 1$. Z poslední rovnosti vyjádříme hledaný součin

$$|AC| \cdot |BD| = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Barvy

Zadání

Malíř pokojů dostal zadání vymalovat dívčí pokoj s použitím tří barev: žluté, oranžové a červené, s podmínkou, že musí využít všechny tři. Strop se nemaluje a zůstává bílý. V pokoji jsou 4 stěny, v první a druhé stěně je výklenek pro okno, ve třetí stěně jsou dva výklenky, jeden pro dveře a jeden pro postel, čtvrtá stěna je bez výklenku. Kolik měl malíř možností pro vymalování pokoje tak, aby nebyly dvě stejně barevné stěny vedle sebe a výklenky byly jinou barvou než stěna okolo nich?

Řešení

Rozdělme úlohu na dva případy:

1. Na čtyři stěny jsou použity všechny tři barvy. Takových možností je dvanáct. Pokud bychom jednotlivé barvy označili čísly 1, 2, 3, pak by se vymalování stěn dalo popsat schematicky takto:

   1213, 1312, 1323, 1232, 2123, 2321, 2131, 2313, 3132, 3231, 3212, 3121

   Máme tam ovšem ještě 4 výklenky, pro každý z nich dvě možnosti vymalování, takže počet 12 ještě čtyřikrát vynásobíme dvěma, což je celkem 192 možností.

2. Na stěny jsou použity pouze dvě barvy. Těchto možností je 6:

   1212, 2121, 1313, 3131, 2323, 3232

   Každý výklenek sice má opět dvě možnosti, ale musíme odečíst ty případy, kdy se vůbec nepoužije třetí barva. Těch je dohromady také 6, pro každou z předchozích možností jedna.

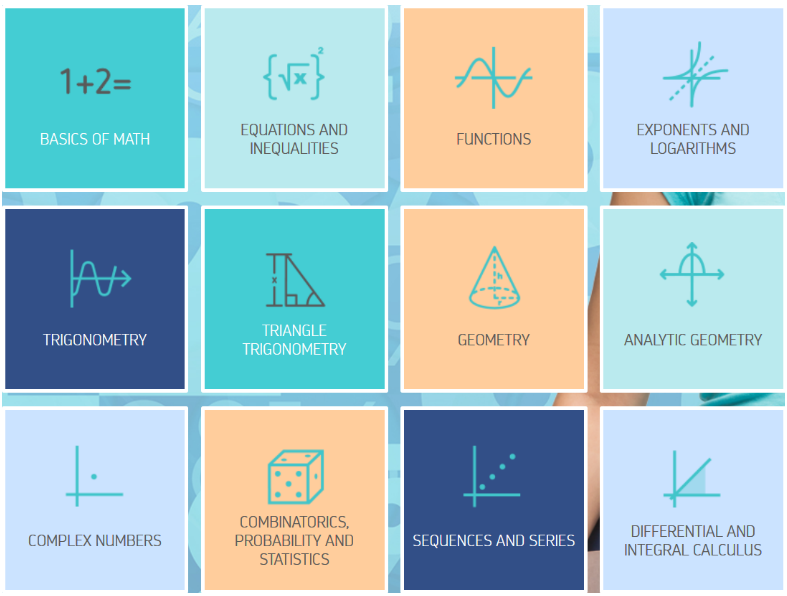
   Celkově tedy nastává pro druhý případ $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 - 6 = 90$ možností.

Sečteme-li oba případy, máme celkem 282 možností vymalování pokoje.

Math4U – Chceme (se) učit i bavit

Jsi žák střední školy a máš chuť si vyzkoušet, co všechno zvládneš ze středoškolské matematiky? Jste učitel a potřebujete připravit interaktivní test nebo písemku? Jestli ano, tak můžete použít vzdělávací portál Math4U `http://math4u.vsb.cz`.

Jedná se o nový webový portál určený studentům pro atraktivní a komplexní procvičování středoškolské matematiky a učitelům pro přípravu interaktivních testů a písemek do výuky. Portál Math4U je rozčleněn na tři hlavní části – Math for Student (Math4S), Math for Teacher (Math4T) a Math for Class (Math4C).



Math for Student

V části Math4S nalezne student unikátní vzdělávací software pro procvičování celé středoškolské matematiky, který dle požadavků studenta (výběr látky, level a počet otázek) vytvoří HTML test. Student odpovídá na testové otázky a získává okamžitou zpětnou vazbu po každé otázce.

Skvělou vlastností tohoto softwaru je multijazyčnost. Nejen, že je možno s testy pracovat v různých jazycích, ale také přímo při řešení testu je možno si zobrazovat danou otázku v různých jazykových mutacích. To opět velmi přispívá k rozšíření a prohloubení znalostí matematické angličtiny.

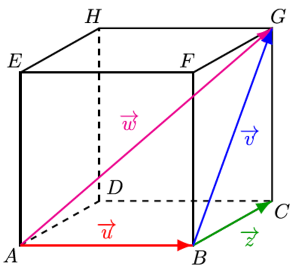
Math for Teacher

Speciálně pro učitele je určena aplikace Math4T. Učitel si může z připravené databáze 4000 otázek vybrat otázky, které se mu líbí a nechat si vygenerovat interaktivní test nebo písemku na míru. Učitel tak získá písemku složenou z testových otázek s jednou správnou odpovědí ve formátu PDF a kromě toho také soubor s výsledky. Atraktivní je také možnost vygenerovat si interaktivní test ve formátu PDF a tento použít pro procvičení ve třídě (pomocí interaktivní tabule nebo projektoru) nebo poslat žákům k domácí přípravě.

Aplikace Math4T pracuje s databází 4000 otázek v každém ze čtyř jazyků (angličtina, čeština, slovenština a polština). Celkem je tedy k dispozici 16 000 otázek. Učitel si tak může vytvořit stejnou písemku ve dvou nebo více různých jazycích, což může být velkou výhodou například pro bilingvní školy nebo pro třídy, v nichž jsou zařazeni studenti na výměnném pobytu. Jedná se také o skvělou přípravu na mezinárodní matematické soutěže či studium v zahraničí.

1. V krychli o délce hrany 1 jsou vyznačeny vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, $\vec{z}$. Vypočtěte skalární součiny:

$$\vec{v}\cdot\vec{z}\ ,\ \ \vec{u}\cdot\vec{v}\ ,\ \ \vec{w}\cdot\vec{u}$$



A $\vec{v}\cdot\vec{z} = 1$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, $\vec{w}\cdot\vec{u} = 1$

B $\vec{v}\cdot\vec{z} = \sqrt{2}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, $\vec{w}\cdot\vec{u} = 1$

C $\vec{v}\cdot\vec{z} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$, $\vec{w}\cdot\vec{u} = \sqrt{3}$

D $\vec{v}\cdot\vec{z} = 1$, $\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$, $\vec{w}\cdot\vec{u} = \sqrt{3}$

MATH 4 Teacher

Math for Class

V části Math4C naleznou studenti i učitelé zajímavé kvízy a vzdělávací hry. Jedná se o tabulkové hry nebo párovací hry, kdy je cílem spárovat správné otázky a odpovědi (například funkce a její předpis, velikost úhlu ve stupních a radiánech). K atraktivitě párovacích her přispívají také tajenky, životopisy slavných matematiků nebo vyhodnocení se zábavným komentářem a obrázkem. Všechny vzdělávací kvízy jsou vytvořeny jako interaktivní PDF soubory s kvalitní sazbou matematiky, okamžitým vyhodnocením a s možností použití bez připojení na Internet. Všech 150 vzdělávacích her je opět vytvořeno ve čtyřech jazycích.

Portál Math4U je hlavním výstupem mezinárodního projektu Math Exercises for You z programu Erasmus+, na kterém v letech 2016–2019 pracovali členové Katedry aplikované matematiky, Fakulty elektrotechniky a informatiky VŠB-Technické univerzity Ostrava a učitelé ze středních škol z Česka, Slovenska a Polska.

RNDr. Petra Vondráková, Ph.D.
Ing. Petr Beremlijski, Ph.D.
Katedra aplikované matematiky, FEI VŠB-TU Ostrava

Spolufinancováno
z programu Evropské unie
Erasmus+

Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, příspěvková organizace

Sborník příkladů ze soutěže Moravskoslezský matematický šampionát 2019

Ostrava 24. 10. 2019

Název	Moravskoslezský matematický šampionát 2019
Editor	Mgr. Jana Gajdušková
Vydavatel	Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, p. o. Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
Náklad	500 ks
Rozsah	28 stran
Vydání	první, 2019, revize 1
Tisk	REPRONIS s.r.o.
Doporučená cena	zdarma

Texty neprošly jazykovou úpravou.