

Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
příspěvková organizace

Moravskoslezský
matematický šampionát
2021

Sborník

Ostrava-Poruba
21. 10. 2021

Autoři a recenzenti:

RNDr. Ivana Breginová, Vojtěch David, Mgr. Lenka Dedková,
Mgr. Jana Gajdušková, Mgr. Lenka Hořenková Kucosová,
Mgr. Petra Kňurová, Mgr. Tomáš Krchňák, Mgr. Lenka Plášková,
Mgr. Lada Stachovcová, Mgr. Marie Štípalová, RNDr. Michal Vavroš, Ph.D.

Obsah

Úvodní slovo	5
<i>Mgr. Jan Netolička</i>	
Descartovo číslo	6
<i>RNDr. Petr Blaschke, Ph.D.</i>	
Kategorie ZŠ 9	
Nádrž na vodu	9
Lucčiny prázdniny	7
Kamarádi na jahodách	12
Kategorie SŠ 3	
Hřebec a kobyla	16
Barevné logo	18
Ztraceni v lese	20
Paperweight	22
Ondrovy dvojice	26

Úvodní slovo

Mám rád velryby. Jsou obrovské a silné. Líbí se mi dívat se na ně v televizi a strašně rád bych nějakou viděl naživo třeba z lodě, ale být vedle ní ve vodě, bál bych se. Ovšem velryby klamou tělem. Mohlo by se zdát, že jsou jen ohromnou hmotou, která plave oceánem. Jenomže podle posledních vědeckých výzkumů si velryby dokonce dávají jména a umí „oslovit“ konkrétního jedince. To znamená, že jim musí v hlavě probíhat nějaký proces podobný našemu myšlení.

Matematika je pro spoustu lidí jako velryba. Obrovská a silná, líbí se jim pozorovat ji, vidět její výsledky, ale když jsou vedle ní moc blízko, bojí se. A představa, že by do ní pronikli, je pro ně stejně neuchopitelná, jako skutečnost, že velryby myslí.

Jestli držíte v ruce tento sborník, jste pro mě hrdinové. Nejen že se nebojíte plavat vedle velryby, nebojíte se dokonce zkoumat ji a ti nejodvážnější z vás sní o tom, že proniknou do tajů jejího myšlení. Držím vám palce, aby se vám to podařilo. Bez vás, stejně jako bez mořských biologů, bychom my ostatní spoustu věcí nevěděli a svět by byl chudší místo.

*Mgr. Jan Netolička
ředitel Wichterlova gymnázia*

Descartovo číslo

Anotace přednášky

Asi před rokem proběhla na Youtube akce nazvaná *#MegaFavNumber*, ve které se Dr. James Grime a Matt Parker obrátili na „nejchytřejší youtubery světa...“, aby představili své nejoblíbenější číslo větší než milión.

Do projektu se nakonec zapojilo 292 lidí. Celý playlist je možné nalézt na <https://www.youtube.com/hashtag/megafavnumbers>

Protože nejsem youtuber, vlastní polínko do ohně jsem nepřiložil. Nicméně pokud by se někdo zeptal – což se tedy neptal – moje nejoblíbenější číslo, které zároveň není v uvedeném seznamu, je číslo

198 585 576 189,

které objevil René Descartes.

Ačkoliv to tak může vypadat, není to Descartovo rodné číslo, dokonce ani jeho číslo účtu – takový druh zajímavosti nevlastní. V čem tedy je zajímavé? S čísly se to má bohužel jako s moderním výtvarným uměním – člověk uvidí tu krásu na vlastní oči, až když mu to někdo vysvětlí.

Naše vysvětlení nás zavede skoro 2 000 let do minulosti, kde se podíváme (kromě jiného) i na „dokonalá čísla“ a s nimi spojenou nevyřešenou záhadu, která straší v budově matematiky už od *Základů* – tedy od knihy *Στοιχεία* Euklida Alexandrijského.

*RNDr. Petr Blaschke, Ph.D.
Matematický ústav v Opavě, Slezská univerzita*

Nádrž na vodu

Zadání

Nádrž na užitkovou vodu má tvar válce o průměru dna 1,6 m a výšce 1,5 m. Do nádrže přitéká při dešti voda z okapu rychlostí 12 litrů za minutu.

- a) Kolik litrů vody bude v nádrži při stejně vydatném dešti za půl hodiny? Kolik procent z objemu nádrže bude zaplněno? Zaokrouhli na celé číslo.
- b) Za jak dlouho bude nádrž zcela zaplněna?

Zahradník si pořídil novou nádrž s objemem 25 hektolitrů a zahradu zalévá konví s objemem 15 litrů. Předpokládáme, že na dně nádrže vždy zůstanou 4 % z celkového objemu.

Zahradník má krok dlouhý 75 cm a s jednou konví udělá průměrně 40 kroků.

- c) Kolik plných konví nabere z plné nádrže? Jakou ujde vzdálenost se všemi konvemi? Vyjádři v kilometrech.
- d) Jak velkou částku peněz takto zahradník za měsíc ušetří, jestliže za metr krychlový vody z obecního vodovodu by zaplatil 35 Kč? Nádrž vyčerpá za měsíc pětkrát.

Řešení

a)

Do nádrže přitéká 12 litrů za 1 min, tedy 360 litrů (nebo $0,36 \text{ m}^3$) za půl hodiny.

Objem nádrže vypočítáme užitím vzorce $V = \pi r^2 v$. Po dosazení dostáváme $V = \pi \cdot 0,8^2 \cdot 1,5$, odkud získáme výsledný objem nádrže $V \doteq 3,0159 \text{ m}^3$.

Pro výpočet procent použijeme údaje v litrech, tedy

$$\frac{360}{30,159} \doteq 11,9367 \doteq 12 \%$$

Nádrž má objem 3019,9 litrů. Za půl hodiny bude v nádrži 360 litrů vody a nádrž bude zaplněna z 12 %.

b) Objem nádrže vydělíme přítokem vody za minutu, zjistíme tak počet minut:

$$\frac{3015,9}{12} \doteq 251,3 \text{ minut,}$$

odkud dostaneme $251,3 : 60 \doteq 4,188$.

Nádrž bude zcela zaplněna asi za 4 hodiny a 11 minut.

c)

Po odečtení 4 % z objemu nádrže získáme množství vody $2\,500 - 100 = 2\,400$ litrů. Tento objem vody vydělíme objemem konve, tedy $2\,400 : 15 = 160$ konví.

Celkový počet kroků získáme vynásobením počtu konví s průměrným počtem kroků, tedy $160 \cdot 40 = 6\,400$ kroků. Při délce jednoho kroku 0,75 metru pak dostaneme výpočtem $6\,400 \cdot 0,75$ celkovou vzdálenost $4\,800 \text{ m} = 4,8 \text{ km}$.

Zahradník nabere 160 plných konví. Ujde s nimi přibližně vzdálenost 4,8 km.

d)

Použijeme údaje v metrech krychlových. Objem vyčerpané vody $2,4 \text{ m}^3$ vynásobíme pětkrát, výsledek násobíme cenou 35 Kč za 1 m^3 . Cena by byla $2,4 \cdot 5 \cdot 35 = 420 \text{ Kč}$.

Zahradník ušetří za měsíc 420 Kč.

Lucčiny prázdniny

Zadání

Lucka byla letos o prázdninách ve čtyřech městech České republiky, ve kterých se narodili nejznámější čeští skladatelé. V každém z nich narazila na nějaký zajímavý matematický problém.

- a) V Litomyšli je na náměstí na stěně věže Staré radnice osazen Český loket, což je délková míra užívaná zhruba od 14. do 18. století. Sloužil ke kontrole míry na trzích. Měří přesně 59 cm.

Lucka si změřila svůj loket – je dlouhý 43 cm. Na šaty by potřebovala 4 takové lokte látky široké 3 lokte. Kolik českých loktů látky by to bylo v Litomyšli na trhu, kdyby byla látka široká 2 české lokte?

- b) V Nelahozevsi u Kralup stojí poblíž rodného domu Antonína Dvořáka bronzová socha tohoto slavného skladatele. Sochu s názvem „Zamyšlený“ vytvořil v roce 1988 sochař Zdeněk Hošek. Bez podstavce je vysoká 2,5 m a na Lucčině fotografii měří 12,5 cm. Jak vysoký je podstavec sochy, jestliže na fotografii měří 6,5 cm?

- c) Na Hukvaldech se Lucčini rodiče rozhodli oslavit 25. výročí svatby letem v balónu. Protože bylo ten den bezvětří, balón stoupal kolmo vzhůru. Aby ho Lucka lépe viděla, poodešla od místa startu 200 metrů. V jednu chvíli, to byl balón ve výšce 250 m, stála přesně v jeho stínu.

Jak daleko byla v tu chvíli vzdušnou čarou od balónu a jak dlouhý vrhala stín, jestliže měří 164 cm? Výsledky zaokrouhlete na celá čísla.

- d) Do světničky věže kostela sv. Jakuba v Poličce, kde se narodil Bohuslav Martinů, vede 192 schodů. Kdyby byl každý schod o 1,25 cm vyšší, stačilo by jich 180. Jak vysoko musel Martinů až do svých 11 let, než se z věže přestěhovali, stoupat?

Řešení

a)

4 Lucčiny lokte odpovídají 172 cm, 3 její lokte jsou 129 cm. Potřebuje tedy 22 188 cm² látky.

2 české lokte měří 118 cm, potřebujeme tedy 22188 : 118 = 180 cm na délku, což odpovídá asi 3,19 českých loktů.

b)

Měřítko fotografie lze počítat např. trojčlenkou:

$$\begin{array}{rcl} 12,5 \text{ cm} & \dots & 250 \text{ cm} \\ 1 \text{ cm} & \dots & x \end{array}$$

odkud

$$\begin{aligned} \frac{x}{250} &= \frac{1}{12,5} \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Měřítko fotografie je 1 : 20.

Výška podstavce (na fotografii 6,5 cm) je tedy ve skutečnosti 130 cm.

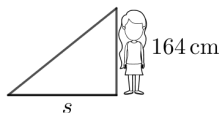
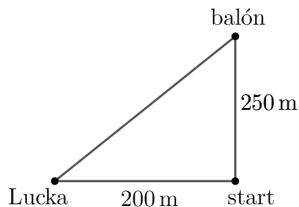
c)

Balón, Lucka a místo startu tvoří vrcholy pravoúhlého trojúhelníku. Vzdušnou vzdálenost Lucky od balónu tedy vypočítáme pomocí Pythagorovy věty:

$$d = \sqrt{200^2 + 250^2} \doteq 320,16 \text{ m.}$$

Po zaokrouhlení: Lucka byla od balónu v tu chvíli 320 m.

Pro výpočet délky stínu s (viz obrázek) můžeme využít podobné trojúhelníky:



$$\frac{200}{250} = \frac{s}{164}$$

$$s = 131,2$$

Po zaokrouhlení: Lucka vrhala stín dlouhý 131 cm.

d)

Označme si výšku schodu neznámou v . Pak platí rovnost:

$$192v = 180(v + 1,25)$$

Rovnici upravíme: $192v = 180v + 225$, odkud dostaneme $12v = 225$, tedy $v = 18,75$.

Abychom zjistili výšku celého schodiště, vynásobíme v počtem schodů, tedy $192 \cdot 18,75 = 3\,600$.

Martinů stoupal do výšky 36 metrů.

Kamarádi na jahodách

Zadání

Během letních prázdnin se pětice kamarádů rozhodla, že společně stráví jeden den. Dopoledne půjdou na brigádu a odpoledne se zajdou vykoupat do blízkého lomu.

1. Věk kamarádů

- a) Podmínkou přijetí na brigádu je věk aspoň 16 let a pracovní doba minimálně dvě a maximálně 6 hodin za den. Věkový průměr všech pěti kamarádů je 18 let, přičemž věk nejmladšího Adama je pětkrát menší než součet let zbývajících kamarádů. Kolik let je Adamovi?
- b) Situace s věkem Olivera, Ivy a Petry je jednoduchá, když víme, že po odchodu kteréhokoliv z nich na plantáž se věkový průměr zbylých kamarádů ve skupině nezměnil. Kolik let je nejstarší Noře?

2. Sběr jahod

- a) Na přidělenou plantáž sbírat jahody se vydali jen čtyři nejstarší kamarádi, ale každému to šlo jinak. Oliver zvládne celou plantáž sám za 12 hodin. Ivě by ten stejný úkol trval dvakrát déle, Petra by to zvládla za dvě třetiny Oliverova času a nejstarší Nora pracuje dvakrát rychleji než Oliver. Budou-li pracovat celou dobu společně, za jak dlouho zvládnou sběr jahod z celé plantáže?
- b) Po hodině společné práce přijel za nimi na tajnou výpomoc i Adam. Spojil se s Oliverem, takže pracoval stejně rychle jako on. I tak pomohl. O kolik minut zkrátil celkový sběr jahod?

3. Cesta na koupání

- a) Po brigádě a krátkém obědě hned vedle plantáže se rozhodli vykoupat v nedalekém lomu. Vyšli společně až na Adama, který ještě dojídal oběd. Průměrná rychlost jejich chůze byla 5 km/h. Za 15 minut po jejich odchodu vyjel stejným směrem na kole i Adam. Jeho průměrná rychlost jízdy na kole byla 20 km/h. Jak dlouho trvalo Adamovi dohnat kamarády?
- b) Jakmile Adam kamarády dostihnul, dál šli společně až k lomu. Cesta jim trvala ještě 20 minut. Jak daleko je lom od místa, kde obědvali?

4. Závod

Po rozplavbě se dívky rozhodly, že si udělají závod v plavání. Jako trasu si vybraly cestu ke skále na protějším břehu a zpět. Po skončení závodu prohlásily:

Petra: „Jsem nejrychlejší.“

Iva: „Nejsem nejrychlejší.“

Nora: „Nejsem nejpomalejší.“

Pořadí v cíli bylo jednoznačné a jen jedna z dívek mluví pravdu. Zdůvodněte, která z dívek mluví pravdu a na základě toho napište skutečné pořadí dívek v závodě.

Řešení

1a)

Věkový (aritmetický) průměr všech pěti kamarádů můžeme zapsat

$$\frac{a + o + i + p + n}{5} = 18.$$

V čitateli tohoto zlomku součet věků zbývajících Adamových kamarádů představuje hodnotu pětikrát větší než je věk Adama. Tuto skutečnost zapíšeme jako $\frac{a + 5a}{5} = 18$. Odtud $6a = 90$, $a = 15$. Adam má 15 let.

1b)

Odchodem Olivera, Ivy a Petry se věkový průměr nezměnil, tedy všichni tři mají 18 let. Odečtením všech známých věků (Adam 15 let, Oliver, Iva a Petra 18 let) od součtu všech věků $5 \cdot 18 = 90$ získáme věk Nory, tedy $90 - 69 = 21$. Nejstarší Nora má 21 let.

2a)

Ze zadání úlohy víme, že Oliver by zvládl sklidit plantáž za 12 hodin, Iva za 24 hodin, Petra za 8 hodin a Nora za 6 hodin. Společně za jednu hodinu práce sklidí $\frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$ plantáže. Celková společná práce pak je

$$x \cdot \frac{5}{12} = 1,$$

odkud $x = \frac{12}{5}$.

Plantáž jahod by společně sklídili za $\frac{12}{5}$ hodiny, tedy za 2 hodiny a 24 minut.

2b)

Výkon Adama je stejný jako Olivera. Za hodinu práce zvládne sklídit $\frac{1}{12}$ plantáže. Po nástupu Adama můžeme společnou práci vyjádřit třeba takto:

$$y \cdot \frac{5}{12} + y \cdot \frac{1}{12} = \frac{7}{12},$$

kde na pravé straně rovnice zlomek $\frac{7}{12}$ představuje zbylou nesklizenou část plantáže po první hodině práce a na levé straně rovnice y je doba společné práce od příchodu Adama.

Výpočet doby práce i s Adamem vychází z rovnice

$$y \cdot \frac{5+1}{12} = \frac{7}{12},$$

odkud $y = \frac{7}{6}$.

Společně s Adamem ještě pracovali $\frac{7}{6}$ hodiny, tj. 1 hodinu a 10 minut, celkově pak 2 hodiny a 10 minut. Proti původnímu plánu se prací s Adamem celková doba sklizně plantáže zkrátila o 14 minut.

3a)

Označme rychlost chůze $v_1 = 5$ km/h, rychlost jízdy na kole $v_2 = 20$ km/h a dobu chůze do okamžiku setkání t . Dále uvážíme, že v okamžiku, kdy Adam dojel na kole skupinu kamarádů, urazili všichni stejnou dráhu. Tedy

$$\begin{aligned} s_1 &= s_2 \\ v_1 t &= v_2 \left(t - \frac{1}{4} \right) \\ 5t &= 20t - 5 \\ t &= \frac{1}{3} \text{ hod} = 20 \text{ min.} \end{aligned}$$

Adam dojel skupinu za 5 minut své jízdy na kole nebo skupina kamarádů šla 20 minut, než je Adam dostihnul na kole.

3b)

Celkovou dráhu můžeme spočítat podle skupiny kamarádů, která šla pěšky. Doba chůze je 40 minut a rychlost skupiny 5 km/h. Proto dráha $s = v \cdot t = 5 \cdot \frac{2}{3}$ km = $\frac{10}{3}$ km.

Vzdálenost lomu od místa, kde obědvali, je přibližně 3,3 km.

4)

Ze zadání úlohy víme, že jen jedna dívka mluví pravdu. Mohou nastat tři případy, kdy jedna z dívek mluví pravdu. A ty je potřeba postupně prověřit.

Pravdu říká Petra, zbylé dvě dívky pravdu nemluví. V tom případě je nejrychlejší Petra. Iva pravdu neříká. Její výpověď tedy ve skutečnosti říká, že je i ona nejrychlejší. Což není možné.

Pravdu říká Iva. Rozborem této skutečnosti zjistíme, že žádná z dívek by nebyla nejrychlejší. Což také není možné.

A konečně pravdu říká Nora. Není nejpomalejší, tedy může být první nebo druhá. Iva pravdu neříká a ve skutečnosti je nejrychlejší. Petra svým tvrzením lže, tedy není nejrychlejší. Zbývá na ni druhé nebo třetí místo.

Konečně máme jednoznačné pořadí závodu: 1. místo Iva, 2. místo Nora, 3. místo Petra.

Hřebec a kobyla

Zadání

Hřebec a kobyla běží z Čenanu do knížectví Čchi, jež je vzdáleno 3000 délkových měř. Za první den uběhl hřebec 193 měř a v každém dalším dni o 13 délkových měř více. Kobyla uběhla v prvním dni 97 délkových měř a v každém dalším dni o půl délkové míry méně. Hřebec doběhl do knížectví Čchi jako první, otočil se, běžel zpátky a v nějakém místě potkal kobyly. Kolikátý den se potkali a kolik měř uběhl do okamžiku setkání každý kůň?

Řešení

Dráhu koně získáme tak, že budeme počítat uběhnuté dráhy za jednotlivé dny. Hřebec za první den urazí $a_1 = 193$ DM (délokové míry), druhý den to bylo $a_2 = (193 + 13)$ DM, třetí den $a_3 = (193 + 2 \cdot 13)$ DM, ..., až n -tý den $a_n = (193 + (n - 1) \cdot 13)$ DM. Dráhy ve dnech můžeme chápat jako členy aritmetické posloupnosti s prvním členem a_1 a diferencí $d_1 = 13$ DM. Tyto dráhy pak sečteme $a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Pro jejich součet lze s výhodou využít vztah pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti. Pak píšeme

$$\frac{n}{2} (a_1 + a_n) = \frac{n}{2} (a_1 + a_1 + (n - 1)d_1).$$

Analogicky dostaneme stejnou situaci pro kobyly. Dráhy uběhnuté za jednotlivé dny můžeme chápat jako členy aritmetické posloupnosti s prvním členem $b_1 = 97$ DM a diferencí $d_2 = -0,5$ DM. Celkový součet drah za jednotlivé dny je

$$\frac{n}{2} (b_1 + b_n) = \frac{n}{2} (b_1 + b_1 + (n - 1)d_2).$$

V místě setkání pak součet drah hřebce a kobyly představuje dvakrát vzdálenost z Čenanu do Čchi, tedy 6000 DM. Rovnice tohoto součtu má tvar

$$\frac{n}{2} (a_1 + a_1 + (n - 1)d_1) + \frac{n}{2} (b_1 + b_1 + (n - 1)d_2) = 6000,$$

po dosazení

$$\frac{n}{2} (2 \cdot 193 + 13n - 13) + \frac{n}{2} (2 \cdot 97 - 0,5n + 0,5) = 6000$$

a úpravě získáme kvadratickou rovnici $5n^2 + 227n - 4800 = 0$. Tato rovnice má dva kořeny, přičemž v úvahu přichází jen kladný kořen $n \doteq 15,71$. Z tohoto řešení vidíme, že hřebec se s kobyloou setkají šestnáctý den.

Zbývá vyřešit, kolik délkových měř každý z nich uběhl. Pro situaci za prvních patnáct (celých) dnů můžeme opět využít vztah pro součet prvních patnácti členů aritmetické posloupnosti:

$$\text{hřebec uběhl } \frac{15}{2} (2 \cdot 193 + 14 \cdot 13) \text{ DM} = 4260 \text{ DM},$$

$$\text{kobyly uběhla } \frac{15}{2} (2 \cdot 97 - 14 \cdot 0,5) \text{ DM} = 1402,5 \text{ DM},$$

v součtu 5662,5 DM. Na poslední den jim zbývalo 337,5 DM. Rychlost hřebce je šestnáctý den $a_{16} = 193 + 15 \cdot 13 = 388$ délkové míry za den, kobyly má rychlost $b_{16} = 97 - 15 \cdot 0,5 = 89,5$ délkové míry za den. V posledním dni pro součet drah obou koní, kteří míří směrem k sobě, má rovnice tvar

$$388t + 89,5t = 337,5 \Rightarrow t = \frac{3375}{4775} = \frac{135}{191},$$

kde t je doba běhu v posledním dni. Nyní už jen spočítáme uběhnuté dráhy obou koní.

Pro hřebce dostaneme dráhu za 16. den $388 \cdot \frac{135}{191} \text{ DM} \doteq 274,24 \text{ DM}$, celkem 4534,24 DM. Kobyly uběhla za poslední den dráhu $89,5 \cdot \frac{135}{191} \text{ DM} \doteq 63,26 \text{ DM}$, celkem pak 1465,76 DM.

Jako zkoušku můžeme dráhy obou koní sečíst a dostaneme

$$4534,24 \text{ DM} + 1465,76 \text{ DM} = 6000 \text{ DM}.$$

Barevné logo

Zadání

Nerozluční kamarádi Adam, Bořek, Cyril, David, Emil a Felix se na počest svého věrného přátelství rozhodli, že si vytvoří vlastní logo. A protože jsou tito mladí muži zároveň velcí nadšenci pro matematiku, napadlo je, že by jejich logo mohlo být složeno z několika různobarevných trojúhelníků, jejichž vrcholy budou popsány počátečními písmeny vlastních jmen chlapců. Na pestrosti trojúhelníků se zatím neshodli, ale při usilovném přemítání o barvách vymysleli Emil s Felixem pro zbývající kamarády zajímavou úlohu:

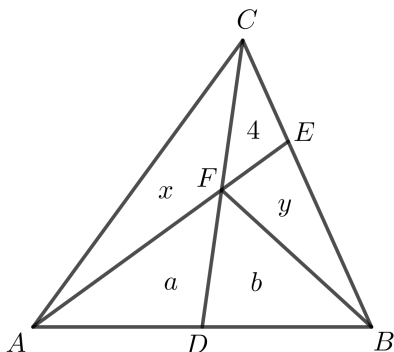
„V trojúhelníkovém logu s vrcholy A, B, C je D střed strany AB a bod E leží na úsečce BC . Bod F je průsečík úseček AE a CD . Obsah trojúhelníku ABC je 15 cm^2 , obsah trojúhelníku FEC je 4 cm^2 .

Určete obsahy trojúhelníků AFC , ADF a čtyřúhelníku $DBEF$.“

Chlapci úlohu vypočítali správně. Zkusíte ji také vyřešit?

Řešení

Označme obsahy trojúhelníků ADF, BDF, AFC, FBE (v cm^2) po řadě a, b, x, y (viz obrázek).



Obsahy trojúhelníků ADF a BDF se rovnají, tj. $a = b$.

Platí, že $a + x = 7,5$ a $b + y = 3,5$.

Trojúhelníky BEF a CEF mají společnou výšku, takže z výpočtů obsahů těchto trojúhelníků plyne, že $|BE| : |CE| = y : 4$.

Stejně tak trojúhelníky BEA a CEA mají taktéž společnou výšku, takže podobně z výpočtů obsahů trojúhelníků dostáváme vztah

$$|BE| : |CE| = (2a + y) : (x + 4).$$

Sestavíme tak rovnici $\frac{y}{4} = \frac{2a + y}{x + 4}$, kterou upravíme do tvaru $xy = 8a$.

Po dosazení za x, y obdržíme kvadratickou rovnici a vypočítáme její kořeny:

$$(7,5 - a) \cdot (3,5 - a) = 8a$$

$$26,25 - 11a + a^2 = 8a$$

$$4a^2 - 76a + 105 = 0$$

Jeden kořen rovnice je $a_1 = 17,5$ a ten nevyhovuje zadání úlohy. Pro druhý kořen $a_2 = 1,5$ je $x = 6$ a $y = 2$.

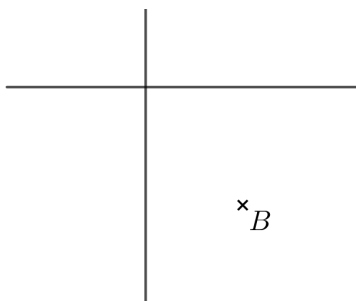
Hledané obsahy trojúhelníků AFC a ADF jsou 6 cm^2 a $1,5 \text{ cm}^2$.

Obsah čtyřúhelníku $DBEF$ je $3,5 \text{ cm}^2$.

Ztraceni v lese

Zadání

Jeníček s Mařenkou se ztratili v lese. I přesto, že Jeníček vylezl na vysoký strom, žádné světlo nezahlédl. Rozhodli se tedy jít náhodně zvoleným směrem (rovnoměrným přímočarým pohybem). My víme, že se nacházejí v místě B , které je vzdáleno od dvou na sebe kolmých cest 1,4 km a 1,7 km (viz obrázek). Jeníček s Mařenkou se pohybují rychlostí 4 km/h. Jaká je pravděpodobnost, že do 30 minut narazí na některou z cest?

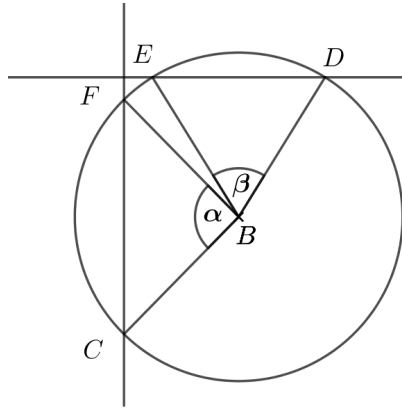


Řešení

Jeníček s Mařenkou ujdou za 30 minut 2 km. Hledáme tedy body, které jsou na cestách a mají vzdálenost menší nebo rovnu 2 km. Najdeme tedy průniky kružnice se středem v bodě B a poloměrem 2 km s přímkami – body C, D, E, F (viz obrázek).

Na cestu narazí, pokud půjdou směrem určeným uvnitř trojúhelníků DBE a CBF .

Vypočteme tedy velikosti vnitřních úhlů v těchto rovnoramenných trojúhelnících u vrcholu B – nejlépe jejich rozdělením na trojúhelníky pravoúhlé.



$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1,4}{2}$$

$$\alpha = 91^{\circ}9'$$

$$\cos \frac{\beta}{2} = \frac{1,7}{2}$$

$$\beta = 63^{\circ}35'$$

Celkový úhel příznivý pro Jeníčka a Mařenku je

$$\phi = \alpha + \beta = 154^{\circ}44'$$

Pravděpodobnost je tedy

$$P = \frac{154^{\circ}44'}{360^{\circ}} = 0,43$$

Pravděpodobnost, že Jeníček s Mařenkou narazí během půl hodiny na některou z cest, je 0,43.

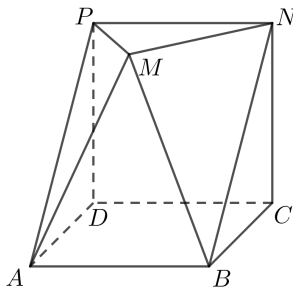
Paperweight

Problem

There is a company that wants to donate a glass paperweight to its loyal clients.

The shape of the paperweight corresponds to a convex solid $ABCDPMN$ shown in the picture, where $ABCD$ and $PNCD$ are squares of side length 2 inches, and $PNCD$ is perpendicular to $ABCD$. Moreover, point M is chosen so that $\triangle PMN$ is parallel to $ABCD$ and $|PM| = |MN|$.

Determine the angle $|\sphericalangle PMN| = \varphi$ so that the volume of the paperweight (i. e. the solid $ABCDPMN$) is equal to 5 in^3 .



Solution

Solution 1

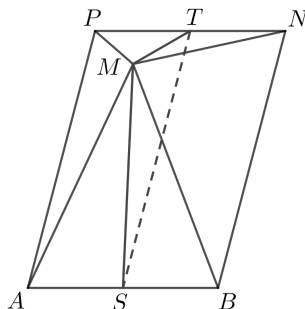
We can split the solid $ABCDPMN$ into two solids $ABCDPN$ and $ABNPM$ by slicing along the plane of $ABNP$.

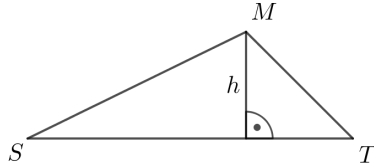
Solid $ABCDPN$ can be viewed as „half“ of a cube with the base $ABCD$. Thus, the volume of this solid equals to $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot |BC| \cdot |CN| = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4$.

Solid $ABNPM$ is a pyramid with rectangular base $ABNP$. Therefore, the volume of $ABNPM$ equals $\frac{1}{3} |AB| |BN| h$, where h is the height of the pyramid.

Obviously, $\triangle BCN$ is right-angled, thus we get $|BN| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ by the Pythagorean Theorem.

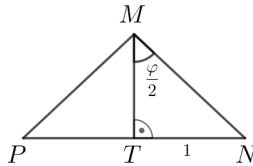
Let T, S are the midpoints of PN, AB , respectively. Now we can consider $\triangle STM$ to determine h .





Note that the angle between plane $ABCD$ and plane $PNBA$ is 45° , and that the plane of $ABCD$ is parallel to the plane of PMN , then the angle between plane $PNBA$ and plane PMN is also 45° , and so $|\sphericalangle MTS| = 45^\circ$.

Further, since $\triangle PMN$ is isosceles, then MT is perpendicular to PN and $\triangle TNM$ is right-angled. Since $|NT| = \frac{1}{2}|PN| = 1$, then $|TM| = \cot \frac{\varphi}{2}$.



Now

$$\begin{aligned} h &= |TM| \sin(\sphericalangle MTS) \\ h &= \cot \frac{\varphi}{2} \sin 45^\circ \\ h &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cot \frac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

Thus, the volume of $ABNPM$ is

$$V_{ABNPM} = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cot \frac{\varphi}{2} = \frac{4}{3} \cot \frac{\varphi}{2}.$$

Finally, the volume of $ABCDNPM$ is equal to 5 if and only if

$$4 + \frac{4}{3} \cot \frac{\varphi}{2} = 5$$

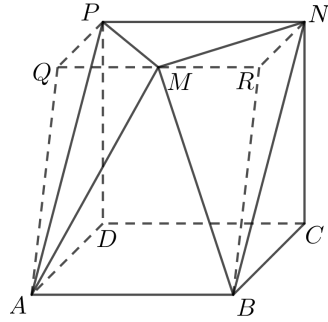
and so we can determine the angle φ :

$$\begin{aligned} \cot \frac{\varphi}{2} &= \frac{3}{4} \\ \frac{\varphi}{2} &= \operatorname{arccot} \left(\frac{3}{4} \right) \\ \varphi &= 2 \operatorname{arccot} \left(\frac{3}{4} \right) \\ \varphi &\doteq 106^\circ 16' \end{aligned}$$

Solution 2

Let us draw a line through M in the plane PMN parallel to PN and denote the intersection of this line with the plane ADP as Q and the intersection of this line with the plane BCN as R .

So the volume of the solid $ABCDPMN$ equals the volume of the solid $ABCDPQRN$ minus the volumes of solids $PMQA$ and $NMRB$.



Obviously, NR and BC are parallel, which makes $BCNR$ a trapezoid. Similarly, $PQAD$ is a trapezoid. And since PN, QR, DC and AB are all perpendicular to the planes of these trapezoids and have the same length, then solid $ABCDPQRN$ is a trapezoidal prism. Thus the volume of solid $ABCDPQRN$ equals

$$V_{ABCDPQRN} = \frac{|BC| + |RN|}{2} \cdot |CN| \cdot |AB| = \frac{2 + |NR|}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 4 + 2|NR|.$$

Solids $PMQA$ and $NMRB$ are triangular-based pyramids. If we consider $\triangle PMQ$ and $\triangle NMR$ as being their bases, then their heights are each equal to 2 (side length of the square $PNCD$). Further, since $PQRN$ is a rectangle and $|PM| = |MN|$, then M is the midpoint of QR . Thus $\triangle PMQ$ and $\triangle NMR$ are congruent and right-angled (at Q and R) and the volumes of solids $PMQA$ and $NMRB$ are equal. So we can express the volume of each pyramids as

$$V_{PMQA} = V_{NMRB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |QM| |PQ| \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |NR| \cdot 2 = \frac{1}{3} |NR|$$

Now we need to determine $|NR|$. Obviously, $|NR|$ is equal to the height of $\triangle PNM$. Thus $|NR| = |TM|$, where T is the midpoint of PN .

So we get $|NR| = \cot \frac{\varphi}{2}$ (see *Solution 1*).

Therefore, the volume of $ABCDPMN$ is equal to

$$4 + 2|NR| - 2 \cdot \frac{1}{3} |NR|$$

or

$$4 + 2 \cot \frac{\varphi}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cot \frac{\varphi}{2}.$$

Finally, for the volume of $ABCDPMN$ the following must hold:

$$4 + 2 \cot \frac{\varphi}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cot \frac{\varphi}{2} = 5$$

and we can determine the angle φ :

$$\begin{aligned} \cot \frac{\varphi}{2} &= \frac{3}{4} \\ \frac{\varphi}{2} &= \operatorname{arccot} \left(\frac{3}{4} \right) \\ \varphi &= 2 \operatorname{arccot} \left(\frac{3}{4} \right) \\ \varphi &\doteq 106^{\circ} 16' \end{aligned}$$

Ondrovy dvojice

Zadání

Ondra si do sešitu napsal všechny dvojice kladných celých čísel x a y , které splňují následující vztah:

$$x^2y^3 = 2^{2021}.$$

Kolik stránek o 22 řádcích jimi popsal, jestliže na každý řádek zapsal právě jednu takovou dvojici?

Řešení

Protože jsou čísla x i y celá a kladná, musí nutně být mocninami dvojky. Nechť $x = 2^k$ a $y = 2^l$, kde k a l jsou nezáporná celá čísla. Nyní dostáváme rovnost v následujícím tvaru:

$$2^{2k}2^{3l} = 2^{2021}.$$

Podle pravidel pro počítání s mocninami si můžeme všimnout, že musí platit

$$2k + 3l = 2021. \tag{1}$$

Nyní můžeme uvažovat následujícím způsobem: Na pravé straně rovnice (1) je číslo liché, proto musí být liché i číslo na straně levé. Číslo $2k$ je ale vždy sudé, proto musí být liché číslo $3l$, a tedy i číslo l . Položme $l = 2m - 1$ pro kladné celé m . Rovnici (1) pak můžeme upravit na tvar

$$2k + 6m - 3 = 2021,$$

odkud lze vyjádřit k :

$$k = 1012 - 3m,$$

což je vztah, ze kterého lze vidět, že číslo k je celé a nezáporné pro hodnoty $m \leq \frac{1012}{3}$, tedy $m \in \{1, 2, \dots, 337\}$. Odsud už tedy plyne, že původnímu vztahu vyhovuje 337 dvojic ve tvaru $(2^{1012-3m}, 2^{2m-1})$ pro oněch 337 hodnot m z výše zmíněné množiny.

Ondra tedy popsal 337 řádků, neboli (vzhledem k tomu, že $337 = 15 \cdot 22 + 7$) 15 stran a 7 řádků.

Jimé řešení:

Vyjděme zase z rovnice (1):

$$2k + 3l = 2021.$$

Naším úkolem nyní je rozepsat číslo 2021 jako součet kladného celého čísla dělitelného třemi a kladného celého čísla dělitelného dvěma. Dosadíme-li $k = 1$, zjistíme, že $2 + 2019 = 2021$ tuto podmínku splňuje, dále si také všimneme, že i všechna čísla $(2 + 6m) + (2019 - 6m)$ tuto vlastnost splňují, neboť potřebujeme zachovat dělitelnost jak dvěma, tak třemi. Rovněž není těžké si rozmyslet, že takto budou popsána všechna taková čísla. Všimneme si dále, že čísla $(2019 - 6m)$ tvoří konečnou aritmetickou posloupnost:

$$a_n = 2025 - 6n,$$

jejíž členy musí být kladné. Protože má tato posloupnost zápornou diferenci, stačí nalézt nejvyšší hodnotu n , pro kterou je $a_n > 0$, čímž dostaneme počet řešení rovnice (1). Tedy

$$2025 - 6n > 0,$$

odkud

$$n < 337,5.$$

Proto můžeme tvrdit, že číslo 2021 lze rozepsat jako součet dvojice kladných čísel, prvního dělitelného dvěma a druhého dělitelného třemi, právě 337 způsoby.

Docházíme tak ke stejnému závěru: Ondra popsal 337 řádků, neboli 15 stránek a 7 řádků.

Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, příspěvková organizace
Sborník příkladů ze soutěže Moravskoslezský matematický šampionát
2021

Ostrava 21. 10. 2021

Název	Moravskoslezský matematický šampionát 2021
Editor	Mgr. Jana Gajdušková
Vydavatel	Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, p. o. Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
Náklad	450 ks
Rozsah	28 stran
Vydání	první, 2021, revize 1
Tisk	REPRONIS s.r.o.
Doporučená cena	zdarma

Texty neprošly jazykovou úpravou.