Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
příspěvková organizace

Moravskoslezský matematický šampionát 2026

Sborník

Ostrava-Poruba
22. 10. 2026

Autoři a recenzenti:

RNDr. Ivana Breginová, Mgr. Lenka Dedková, Mgr. Jana Gajdušková, Mgr. Lenka Hořenková Kucosová, Mgr. Petra Kňurová, Mgr. Tomáš Krchňák, Mgr. Pavlína Pawerová, Mgr. Lenka Plášková, Mgr. Pavel Skalný, Ph.D., Mgr. Marie Štípalová, Mgr. Jan Todter, RNDr. Michal Vavroš, Ph.D.

© Mgr. Jana Gajdušková, 2026

Obsah

Úvodní slovo 5
Mgr. Jan Netolička

Dobble – od SOČky přes rodinnou hru až k superpočítači 6
doc. Mgr. Petr Kovář, Ph.D.

Kategorie ZŠ 9

Oslava výročí 7

Kočka domácí 11

Fotbalové mistrovství světa 14

Kategorie SŠ 3

Kód k trezoru 17

The Sport Balls in a Sphere 18

Poznámka v zápisníku 20

Učitel na schodech 22

Závěť mistra čokolatiéra 24

Úvodní slovo

Já jsem to tak nemyslel, to jste mě špatně pochopil, asi to nebyla nejvhodnější formulace, ale vy mi přece rozumíte, že?

Na začátku komunikace je myšlenka nebo pocit, který máme hluboko v sobě. Abychom je sdělili někomu jinému, potřebujeme kód, do kterého je převedeme. Pro dokonalý přenos myšlenky musí tento kód ovládat i druhá strana, protože ho musí použít k rozšifrování naší zprávy. Když se vše podaří, může náš partner v komunikaci získat poměrně přesnou představu, jak naše myšlenka nebo pocit před zakódováním vypadaly.

Do celého procesu pak ještě vstupují různé filtry, které celý přenos informace mohou pozměnit, jako když fotíte zatmění slunce přes disketu. Naše osobnost, aktuální nálada, rozdílná výchova v rodině, která daný kód používá trochu jinak, zkušenosti. I větu *Miluji tě* mohou takové filtry pozměnit tak, že vyzní jako sarkastická poznámka, která druhou stranu rozčílí.

Matematika je kód, který slouží k tomu, aby danou informaci šlo přenést prakticky stoprocentně přesně. Bez filtrů, bez rizika nežádoucí změny. Je to jeden z nejlepších nástrojů pro sdělování dat, jaký lidstvo vymyslelo. $1 + 1 = 2$ (většinou). Zbývá jen podmínka, aby daný kód ovládali všichni účastníci komunikace.

Gratuluji vám, protože chápete sílu tohoto nástroje a chcete ho umět používat. Ve světě AI to bude potřeba víc, než si lidé uvědomují...

Mgr. Jan Netolička
ředitel Wichterlova gymnázia

Dobble – od SOČky přes rodinnou hru až k superpočítači

Anotace přednášky

Postřehová hra *Dobble* je populární u hráčů všech generací. Jak ale systém kartiček hry připravit? Jak různé symboly rozdělit na jednotlivé kartičky? To jsou otázky, se kterými za mnou přišel středoškolský student, který se mnou spolupracoval v rámci SOČ.

Při hledání odpovědí na položené otázky jsme zjistili, že ne všechno, co píší v návody hry, je správně, že počet kartiček by mohl být o malinko vyšší a že podobnou hru je možno připravit i s jiným počtem symbolů na kartičkách.

Dokonce se ukázalo, že věc souvisí s oblastmi pokročilé matematiky, která nejenže překračuje rámec středoškolské kombinatoriky, ale dotýká se i některých otevřených problémů moderní matematiky. V přednášce ukážeme jednak jednoduchý rozbor vlastností hry, který snadno vstřebají i středoškoláci. Upozorníme i na několik překvapivých souvislostí.

Navíc ukážeme, jak byla stejná myšlenka využita při rozkladu rozsáhlých výpočtů na jádra superpočítače ostravského Národního superpočítačového centra IT4Innovations.

doc. Mgr. Petr Kovář, Ph.D.
Katedra aplikované matematiky
Fakulta elektrotechniky a informatiky, VŠB-TU Ostrava

Oslava výročí

Zadání

V jisté škole se slaví letos 70. výročí založení, sešli se tu absolventi různých tříd.

1. Záhadné zvonění

Školní zvonek se na oslavě porouchal a zvoní podle zvláštních pravidel:

- první zvonění trvá 6 sekund,
- každé další je o 30 % delší než předchozí.

Jak dlouho zvonek celkem zvonil během prvních pěti zvonění?

2. Koláčky

Na oslavu si jedna třída připravila tác s koláčky. Každý koláček má buď čokoládovou, nebo jahodovou náplň.

Víme, že 40 % koláčků je čokoládových a že jahodových je o 18 více než čokoládových.

Kolik je celkem koláčků?

3. Třídní dort

Absolventi z jiné třídy si přinesli na oslavu velký dort, který jedli ve třech skupinkách.

První skupina snědla $\frac{2}{5}$ dortu, druhá skupina snědla $\frac{1}{4}$ z toho, co zbylo. Třetí skupina snědla $\frac{1}{3}$ z nového zbytku.

Jaká část dortu zůstala nakonec?

4. Záhadný bufet

Večer se v bufetu chlebíčky ztrácejí rychleji než vzpomínky.

Na stole bylo na začátku 120 chlebíčků, každou minutu zmizí 12 chlebíčků a každé 4 minuty přinese obsluha nový tác s 15 chlebíčky.

Po kolika minutách bude na stole méně než 30 chlebíčků?

5. Výroční balonky

Na oslavu se nafukují balonky tří barev – červená, modrá a bílá.

Modrých balonků je 35 % celkového počtu, červených je o 26 více než modrých a bílých je 34 kusů.

Kolik balonků bylo připraveno celkem?

6. Znak školy

Na oslavu výročí nakreslili na školní stěnu všichni žáci znak školy. Znaky jsou uspořádány do patnácti řad. Přitom platí, že:

- v první řadě je určitý počet znaků,
- v každé další řadě je o 2 znaky více než v předchozí,
- kdyby se z první řady přesunulo 10 znaků do poslední, byl by počet znaků v první řadě právě polovinou počtu znaků v poslední řadě.

Kolik má škola žáků, jestliže každý z nich nakreslil právě jeden znak?

Řešení

1. Záhadné zvonění

Trvá-li první zvonění 6 sekund, délku druhého vypočítáme $6 \cdot 1{,}3 = 7{,}8$ s.

Třetí pak trvá $7{,}8 \cdot 1{,}3 = 10{,}14$ s.

Podobně vypočítáme zbývající dvě zvonění: 13,182 s a 17,1366 s.

Součet všech je

$$6 + 7{,}8 + 10{,}14 + 13{,}182 + 17{,}1366 = 54{,}2586 \text{ s}.$$

Odpověď: Během prvních pěti zvonění zvonek zvonil celkem 54,2586 s.

2. Koláčky

Označme počet všech koláčků x. Počet čokoládových je tedy $0{,}4x$ a jahodových $0{,}6x$.

Podle zadání je jahodových o 18 více, sestavíme rovnici

$$0{,}6x = 0{,}4x + 18,$$

odtud $0{,}2x = 18$ a $x = 90$.

Odpověď: Celkem je na tácu 90 koláčků.

3. Třídní dort

Jestliže první skupina sní $\frac{2}{5}$ dortu, zbude $1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$ dortu.

Pak druhá skupina sní $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$ dortu a zbude $\frac{3}{5} - \frac{3}{20} = \frac{9}{20}$ dortu.

Třetí skupina sní $\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{20} = \frac{3}{20}$ a zbude $\frac{9}{20} - \frac{3}{20} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$ dortu.

Odpověď: Nakonec zůstanou $\frac{3}{10}$ dortu, tj. 30 % dortu.

4. Záhadný bufet

Vždy po 4 minutách se stav změní o $-48 + 15 = -33$ chlebíčků.

Můžeme tedy uvažovat, že 66 chlebíčků ubyde po 8 minutách a po dalších 2 minutách jich zbude 30.

Tedy v 11. minutě bude počet chlebíčků menší než 30.

Odpověď: Na stole bude méně než 30 chlebíčků po 11 minutách.

5. Balonky

Označíme součet všech balonků x. Modrých balonků je $0{,}35x$, červených $0{,}35x + 26$ a bílých je 34.

Sestavíme rovnici

$$0{,}35x + (0{,}35x + 26) + 34 = x.$$

Po úpravě dostaneme

$$0{,}7x + 60 = x,$$

$$0{,}3x = 60,$$

$$x = 200.$$

Odpověď: Na oslavě bude 200 balonků.

6. Znak školy

Označme počet znaků v první řadě x. Pak poslední, tedy patnáctá řada, má $x + 14 \cdot 2 = x + 28$ znaků.

Po přesunu deseti znaků má první řada $x - 10$ znaků a poslední řada $x + 38$ znaků.

Z třetí podmínky sestavíme rovnici

$$x - 10 = \frac{x + 38}{2}.$$

Po úpravě

$$2x - 20 = x + 38,$$

tedy $x = 58$.

V první řadě je tedy 58 znaků.

Dále součet všech přidaných znaků v dalších řadách je

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 28 = 210.$$

Celkový počet znaků je

$$15 \cdot 58 + 210 = 1080.$$

Počet žáků je roven počtu znaků.

Odpověď: Na škole je celkem 1080 žáků.

Kočka domácí

Zadání

1. Kočka domácí je pořádný spáč. Prospí až $\frac{2}{3}$ dne. Kolik nejméně hodin týdně se může věnovat jiné aktivitě než spaní?

2. Při lovu může kočka dosáhnout rychlosti až 50 km/h, tuto rychlost je schopna udržet na krátkou trať. Při svém závodě na Zlaté tretře v roce 2016 zaběhl Usain Bolt 100 m za 9,98 sekund. O kolik sekund by kočka doběhla do cíle dříve?

3. Kočky jsou schopny vyskočit do výšky až šestinásobku své délky, která i s ocasem může dosahovat délky 80 cm. Do jaké výšky by se při stejné výkonnosti dostala žena s výškou postavy 1,65 m?

4. Zornice kočky mění svou velikost v závislosti na intenzitě osvětlení. Předpokládejme, že má zornice tvar kruhu. Při jasném světle je její průměr 2 mm, zatímco za šera se zornice rozšíří na 10 mm.

   O kolik procent se zvětší plocha zornice za šera?

5. Čtyři kamarádky Jana, Petra, Lenka a Pavlína mají každá jednu kočku. Kočky mají různou kresbu (mramorovaná, tygrovaná, tečkovaná, habešská) a různou barvu srsti (černá, červená, čokoládová, skořicová). Pomocí nápověd určete, jakou kočku má Pavlína.

   a) Jana nemá černou ani skořicovou kočku.
   b) Petra nemá červenou ani skořicovou kočku.
   c) Lenka má černou kočku.
   d) Čokoládová kočka má tygrovanou srst.
   e) Skořicová kočka nemá mramorovanou srst.
   f) Jana nemá kočku s tygrovanou srstí ani s mramorovanou.
   g) Pavlínina kočka nemá tečkovanou srst.

Řešení

1. Kočka prospí $\frac{2}{3}$ dne, to je $24 \cdot \frac{2}{3} = 16$ hodin.

   Nespí tedy $24 - 16 = 8$ hodin za den, za týden to bude $8 \cdot 7 = 56$ hodin.

Odpověď: Kočka se může jiné aktivitě než spaní věnovat nejméně 56 hodin týdně.

2. Využijeme vztah pro výpočet času $t = \frac{s}{v}$, rychlost si převedeme na m/s.

   Tedy

   $$t = \frac{100}{50 : 3{,}6} = 7{,}2 \text{ s}.$$

   Rozdíl mezi Boltem a kočkou činí

   $$9{,}98 - 7{,}2 = 2{,}78 \text{ s}.$$

   Odpověď: Kočka by doběhla do cíle o 2,78 sekundy dříve.

3. Délka výskoku kočky je $0{,}8 \cdot 6 = 4{,}8$ m.

   Pokud by žena měla stejnou výkonnost, dosáhla by výšky

   $$x = 1{,}65 \cdot 6 = 9{,}9 \text{ m}.$$

   Odpověď: Žena by dosáhla výšky 9,9 m.

4. Za předpokladu, že zornice je tvaru kruhu, vypočítáme její obsah podle vztahu

   $$S = \pi r^2.$$

   Na jasném světle je

   $$S_1 = \pi \cdot 1^2 \text{ mm}^2 = \pi \text{ mm}^2.$$

   Za šera je

   $$S_2 = \pi \cdot 5^2 \text{ mm}^2 = 25\pi \text{ mm}^2.$$

   Nárůst bude

   $$\frac{25\pi - \pi}{\pi} \cdot 100 \,\% = 2400 \,\%.$$

   Odpověď: Plocha zornice se za šera zvětší o 2400 %.

5. Úloha je typu Zebra. Můžeme ji řešit tabulkou se jmény dívek, barvou kočky a typem srsti.

   Nebo uvažujeme podle nápověd: nápověda c) říká, že Lenka má černou kočku. Podle nápověd a), b) skořicovou kočku nemají Jana ani Petra, tedy ji musí mít Pavlína a čokoládovou kočku má Petra.

   Podle d) Petra má kočku s tygrovanou srstí. Další nápovědy e), f), g) vedou k určení typu srsti.

   Pavlína má skořicovou kočku s habešskou srstí.

   Pro úplnost:

   - Lenka má černou kočku s mramorovanou srstí,
   - Petra má čokoládovou kočku s tygrovanou srstí,
   - Jana má červenou kočku s tečkovanou kresbou,
   - Pavlína má skořicovou kočku s habešskou srstí.

   Odpověď: Pavlína má skořicovou kočku s habešskou srstí.

Fotbalové mistrovství světa

Zadání

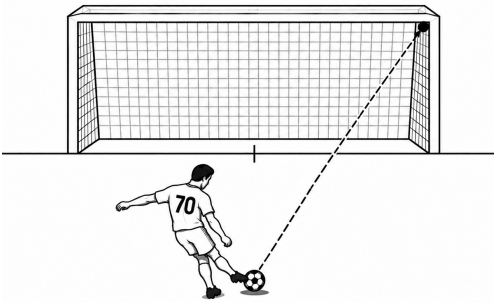
Letošní léto patřilo fotbalu. Na turnaji se představilo 48 týmů a během 104 zápasů se rozhodlo o novém mistru světa (zvítězilo Španělsko). Společně se podíváme, kolik zajímavé matematiky se za tímto svátkem fotbalu ukrývá.

1. FIFA doporučuje rozměr hřiště 105 m na délku a 68 m na šířku.

   a) Osivo na přípravu trávníku se používá v množství 35 g na 1 m^2 plochy a prodává se v pytlích po 20 kg. Kolik pytlů osiva je potřeba koupit?

   b) Trávník byl posekán do stejně širokých střídavých světlých a tmavých pruhů rovnoběžných s kratší stranou hřiště. První i poslední pruh jsou tmavé a celkem je na hřišti 21 pruhů. O kolik metrů čtverečních je plocha tmavých pruhů větší než plocha světlých?

2. Značka pokutového kopu leží 11 m od brankové čáry (na kolmici vedené ze středu branky směrem do hřiště). Fotbalista vystřelil penaltu rychlostí 108 km/h. Předpokládejme, že míč letí rovnoměrně přímočaře a jeho rychlost se nemění.



   Za jak dlouho doletí míč do pravého horního rohu brány? Brána má vnitřní rozměry: šířku 7,32 m a výšku 2,44 m.

   Výpočty vhodně zaokrouhlete.

3. Oficiální míč má obvod hlavní kružnice 69 cm. Považujte jej za dokonalou kouli a použijte $\pi \approx 3{,}14$. Určete délku hrany nejmenší krychlové krabice, do které by se míč vešel. Výsledek zaokrouhlete na celé centimetry.

4. a) Na šampionátu bylo 48 týmů rozděleno do 12 skupin po čtyřech. V každé skupině hraje každý s každým právě jeden zápas. Kolik zápasů se odehrálo ve všech skupinách?

   b) Ze skupin postupuje 32 týmů a následuje vyřazovací část turnaje (v každém zápase vítěz postupuje a poražený končí). Kolik zápasů má tato vyřazovací část včetně utkání o třetí místo?

   c) Trenér vybírá z 11 hráčů pět různých hráčů pro první sérii penalt. Záleží také na tom, v jakém pořadí budou penalty zahrávat. Kolika způsoby může vybrat a seřadit pět střelců?

Řešení:

1. a)

Plocha hřiště tvaru obdélníku je $S = 105 \cdot 68\ \mathrm{m}^2 = 7140\ \mathrm{m}^2$, spotřebujeme $7140 \cdot 35\ \mathrm{g} = 249900\ \mathrm{g} = 249{,}9\ \mathrm{kg}$ osiva. A počet pytlů potřebných na jedno hřiště je $249{,}9 : 20 = 12{,}495$.

Protože lze koupit pouze celé pytle a 12 pytlů nestačí, je potřeba koupit 13 pytlů.

1. b)

Na hřišti je 21 pruhů, 10 světlých a 11 tmavých, každý o šířce $105 : 21 = 5$ m. Plocha jednoho pruhu je rovna $5 \cdot 68\ \mathrm{m}^2 = 340\ \mathrm{m}^2$.

Plocha tmavých pruhů je o $340\ \mathrm{m}^2$ větší než plocha světlých pruhů.

2.

Pro celkovou dráhu míče s od značky pokutového kopu až k pravému hornímu okraji použijeme dvakrát Pythagorovu větu.

Nejprve vzdálenost od značky k pravému dolnímu rohu: $11^2 + 3{,}66^2 \doteq 134{,}40$; vzdálenost přibližně 11,59 m. Pomocí této vzdálenosti a známé výšky brány opětovným použitím Pythagorovy věty vypočítáme vzdálenost, kterou míč urazí. Tedy $s^2 = 11{,}59^2 + 2{,}44^2 = 140{,}35$, pak $s = 11{,}85$ m.

Doba pohybu míče od kopnutí z místa pokutového kopu k hornímu rohu je $t = \frac{s}{v} = \frac{11{,}85}{30} = 0{,}395$ s, přičemž jsme rychlost dosadili v odpovídajících jednotkách $30\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Míč doletí do horního rohu branky přibližně za 0,4 s.

3.

Délka a hrany krychlové krabice na míč je rovna průměru míče. Výpočet ze vztahu $o = 2\pi r = \pi d$ je pak následující: $a = \frac{o}{\pi} = \frac{69}{3{,}14} = 21{,}97$ cm.

Délka hrany krychlové krabice na míč je přibližně 22 cm.

4. a)

V jedné čtyřčlenné skupině, ve které hraje každý s každým právě jednou, se odehraje celkem 6 zápasů (ze čtyř mužstev sestavíme 6 různých dvojic). Skupin je celkem 12 a celkem se odhrálo $12 \cdot 6 = 72$ zápasů.

Během šampionátu se odehrálo v základních skupinách celkem 72 zápasů.

4. b)

Ze skupin postoupilo do vyřazovací části 32 týmů. Utvořilo se 16 dvojic a odehrálo se 16 zápasů. Polovina týmů vypadla a zbývajících 16 týmů odehrálo 8 zápasů osmifinále. Odtud postoupilo 8 týmů a odehrálo čtyři zápasy čtvrtfinále. Zbývající 4 týmy odehrály 2 zápasy semifinále a 1 zápas o třetí místo a jeden finálový zápas (Španělsko–Argentina). Přehledně je počet zápasů roven $16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1 = 32$.

Ve vyřazovací části mistrovství světa ve fotbale 2026 se odehrálo 32 zápasů (včetně boje o třetí místo).

4. c)

Trenér má na první pozici 11 možností (vybírá ze všech hráčů), na druhou pozici už jen 10 možností, na třetí pozici 9 adeptů, na čtvrtou pozici vybírá už jen z 8 hráčů a jako posledního může vybrat někoho ze zbývajících 7 hráčů. Výpočítáme celkový počet možností $11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 55\,440$.

Na jednu sérii kopání penalt trenér může pět střelců vybrat a seřadit 55 440 různými způsoby.

Kód k trezoru

Zadání

V kabinetu matematiky byl nalezen starý trezor, jehož otevření vyžaduje zadání kódu. Vedle něj ležel rukou psaný lístek s následující úlohou:

Najděte všechna **celá** čísla n, pro která je výraz $\dfrac{n^2+2026}{n+1}$ celým číslem.

Kód k otevření trezoru tvoří všechna nalezená čísla seřazená vzestupně, včetně jejich znaménka. Určete tento kód.

Řešení

Čitatel lomeného výrazu si upravíme tak, že odečteme a přičteme jedničku:

$$\frac{n^2+2026}{n+1} = \frac{n^2-1+2027}{n+1} = \frac{(n+1)(n-1)+2027}{n+1}.$$

Pro $n \neq -1$ dále lomený výraz rozdělíme na dvě části a upravíme:

$$\frac{(n+1)(n-1)+2027}{n+1} = n-1+\frac{2027}{n+1}.$$

Ke stejnému výrazu lze také dojít klasickou cestou dělením mnohočlenu mnohočlenem, neboli

$$(n^2+2026) : (n+1) = n-1+\frac{2027}{n+1}.$$

Protože n je celé číslo, výraz $n-1$ je vždy celým číslem. Aby byl celočíselný i zbytek výrazu, musí být jmenovatel $n+1$ celočíselným dělitelem čísla 2027.

Číslo 2027 je prvočíslo, jeho celočíselnými děliteli jsou tedy pouze čísla 1, -1, 2027, -2027. Musí proto platit

$$(n+1) \in \{-2027, -1, 1, 2027\},$$

odkud dostáváme $n \in \{-2028, -2, 0, 2026\}$.

Vstupní kód pro otevření trezoru jsou celá čísla v pořadí $-2028, -2, 0, 2026$.

The Sport Balls in a Sphere

Problem

A company is designing a new package for sports balls. The package is a sphere with a cylinder of radius 15 cm and height 16 cm inscribed inside it.

Three identical small balls of radius x lie on the base of the cylinder. Each ball is externally tangent to the base, externally tangent to each other and internally tangent to the spherical package. Find the value of x.

Solution

Let S be the center of the large sphere, and let S_1, S_2, S_3 be the centers of the small balls. The triangle $S_1S_2S_3$ is equilateral with centroid T. Let the radius of the large sphere be r.

By the Pythagorean theorem,

$$r = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17 \text{ cm},$$

and obviously

$$ST = 8 + x.$$

Since $S_1S_2 = S_2S_3 = S_1S_3 = 2x$, we have

$$S_1T = \left(2x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{2}{3} = \frac{2x\sqrt{3}}{3}.$$

This implies that

$$SS_1 = \sqrt{(S_1T)^2 + (ST)^2} = \sqrt{\frac{4x^2}{3} + (8+x)^2}.$$

For the radius of the large sphere, we have

$$r = SS_1 + x,$$

therefore

$$17 = \sqrt{\frac{4x^2}{3} + (8+x)^2} + x.$$

After simplifying, we get the quadratic equation

$$4x^2 + 150x - 675 = 0.$$

Only one solution has a geometric meaning:

$$x = \frac{-150 + \sqrt{150^2 + 16 \cdot 675}}{8} = \frac{-75 + 15\sqrt{37}}{4} \approx 4.06 \text{ cm}.$$

Poznámka v zápisníku

Zadání

V pracovním zápisníku známého matematika byla nalezena jediná poznámka:

„Pro která reálná čísla a, b, c má rovnice

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

kořeny a, b, c (včetně násobností)?“

Najděte řešení tohoto problému.

Řešení

Nechť reálná čísla a, b, c jsou kořeny dané rovnice, pak levou stranu rovnice můžeme rozložit na součin kořenových činitelů a po úpravě dostaneme:

$$x^3 - ax^2 + bx - c = (x-a)(x-b)(x-c) =$$

$$= x^3 - ax^2 - bx^2 - cx^2 + abx + acx + bcx - abc =$$

$$= x^3 + x^2(-a-b-c) + x(ab+ac+bc) - abc.$$

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin proměnné x na obou stranách identity získáme:

$$-a = -a - b - c, \qquad \text{odkud } b + c = 0 \tag{1}$$

$$b = ab + ac + bc, \qquad \text{odkud vzhledem k (1) } b = bc \tag{2}$$

$$-c = -abc, \qquad \text{odkud } c = abc. \tag{3}$$

Je-li $c = 0$, je podle vztahu (1) také $b = 0$.

Pro libovolné reálné a má pak rovnice

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

tvar

$$x^3 - ax^2 = 0$$

a její kořeny jsou $a, 0, 0$.

Je-li $c \neq 0$, je podle vztahu (1) také $b \neq 0$ a vzhledem k vztahu (2) dostaneme

$$c = 1.$$

Potom však podle (1) je

$$b = -1$$

a podle (3) také

$$a = -1.$$

Řešením jsou tedy trojice čísel a, b, c, pro které platí

$$a \in \mathbb{R}, \qquad b = 0, \qquad c = 0,$$

nebo

$$a = -1, \qquad b = -1, \qquad c = 1.$$

Učitel na schodech

Zadání

Učitel Tomáš má kabinet ve zvýšeném přízemí. Každé ráno vystoupá do kabinetu po 12 schodech. Protože je to sportovec a matematik, chodí do schodů po jednom, dvou nebo třech schodech.

Kolika různými způsoby může schody vyjít?

Dva způsoby považujeme za různé, pokud se liší alespoň v jednom kroku.

Řešení

Označme a_n počet způsobů, jak vystoupat n schodů.

Na poslední (dvanáctý) schod můžeme vystoupat z jedenáctého, z desátého, nebo z devátého schodu.

Toto můžeme zapsat rekurentním vztahem

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}, \text{ kde } n > 3. \tag{1}$$

Pro náš případ tedy $a_{12} = a_{11} + a_{10} + a_9$.

Stanovíme první členy posloupnosti: Pro jeden schod existuje pouze jedna možnost. Dva schody lze vyjít dvěma způsoby – po jednom schodu nebo krokem přes oba schody. Tři schody lze vyjít po jednom schodu, dvěma možnostmi přes jeden a dva schody, nebo krokem přes tři schody. Tedy

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 4$$

Nyní postupně podle (1) dopočítáme další členy:

$$a_4 = 7, a_5 = 13, a_6 = 24, a_7 = 44, a_8 = 81,$$

$$a_9 = 149, a_{10} = 274, a_{11} = 504, \mathbf{a_{12} = 927}.$$

Učitel Tomáš může schodiště vyjít 927 různými způsoby.

Druhé řešení

Úlohu lze řešit i kombinatoricky. Tomáš může 12 schodů vyjít různým počtem kroků – od čtyřech kroků, kdy bere schody po třech, až po dvanáct

kroků, kdy jde po jednom schodu. Pro výpočet možností v jednotlivých případech využijeme vzorec pro permutace s opakováním, v našem případě

$$P'_n(k_1, k_2, k_3) = \frac{n!}{k_1!\, k_2!\, k_3!},$$

kde n je celkový počet kroků, k_1 počet kroků po 1 schodu, k_2 počet kroků po 2 schodech, k_3 počet kroků po 3 schodech.

V následující tabulce jsou uvedeny všechny varianty i s příslušným výpočtem. Součet čísel v posledním sloupci je roven 927, a to je také odpověď na otázku, kolika způsoby může Tomáš schody vyjít.

Celkem kroků	**Po 1 schodu**	**Po 2 schodech**	**Po 3 schodech**	**Počet různých možností**
4	0	0	4	1
5	1	1	3	$\frac{5!}{3!} = 20$
	0	3	2	$\frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$
6	3	0	3	$\frac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$
	2	2	2	$\frac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 90$
	1	4	1	$\frac{6!}{4!} = 30$
	0	6	0	1
7	4	1	2	$\frac{7!}{4!\cdot 2!} = 105$
	3	3	1	$\frac{7!}{3!\cdot 3!} = 140$
	2	5	0	$\frac{7!}{2!\cdot 5!} = 21$
8	6	0	2	$\frac{8!}{6!\cdot 2!} = 28$
	5	2	1	$\frac{8!}{5!\cdot 2!} = 168$
	4	4	0	$\frac{8!}{4!\cdot 4!} = 70$
9	7	1	1	$\frac{9!}{7!} = 72$
	6	3	0	$\frac{9!}{6!\cdot 3!} = 84$
10	9	0	1	$\frac{10!}{9!} = 10$
	8	2	0	$\frac{10!}{8!\cdot 2!} = 45$
11	10	1	0	$\frac{11!}{10!} = 11$
12	12	0	0	1

Závěť mistra čokolatiéra

Zadání

Starý mistr čokolatiér Pierre strávil celý život hledáním dokonalé harmonie chutí a tvarů. Na sklonku své kariéry vytvořil své vrcholné dílo – monumentální čokoládovou skulpturu z té nejjemnější belgické čokolády, vymodelovanou do tvaru přesného rotačního tělesa.

Když Pierre zakreslil výrobní plány do trojrozměrného prostoru $\mathbb{R}^3$, zjistil, že těleso vzniklo rotací grafu lineární funkce

$$f(x) = 2 - \frac{x}{2},$$

která je definovaná na intervalu $x \in \langle 0, 4\rangle$, kolem osy x.

Mistr však své dílo nedokončil, ale zanechal závěť určenou jeho dvěma cukrářským učňům – Jakubovi a Filipovi. V závěti stálo:

„Drazí učni, toto dílo je symbolem mého odkazu. Přenechám vám ho, ale pouze pod podmínkou, že prokážete nejen cit pro řemeslo, ale i bystrou mysl. Rozkrojte skulpturu jedním řezem na dvě části. Proveďte jej dělicí rovinou kolmou k ose x o rovnici $x = a$, kde $a \in (0, 4)$. Protože Jakub strávil v mé dílně o dva roky déle, právem mu náleží větší podíl z čokoládové skulptury. Musíte však dodržet jednu podmínku: objem menšího z obou vzniklých kusů musí tvořit přesně jednu třetinu objemu kusu většího. Dokažte, že umíte nožem rozříznout těleso s matematickou přesností!“

Úkol: Najděte všechny přesné hodnoty parametru a takové, aby byla splněna mistrova podmínka týkající se objemů jednotlivých částí.

Řešení

Grafem funkce $f(x) = 2 - \frac{x}{2}$, kde $x \in \langle 0, 4\rangle$, je úsečka. Rotací úsečky kolem osy x vznikne rotační kužel, který má výšku $v = 4$ jednotky a poloměr základny $r = 2$ jednotky.

Rovina $x = a$ je kolmá na osu x. Hledáme tedy hodnotu $a \in (0; 4)$, díky které se původní kužel rozdělí na menší kužel pro $x \in \langle a; 4\rangle$ a komolý kužel pro $x \in \langle 0; a\rangle$.

Víme, že objem menší části tvoří právě $\frac{1}{3}$ objemu větší části. Z toho plyne, že menší část tvoří celkem $\frac{1}{4}$ objemu a větší část tvoří $\frac{3}{4}$ celkového objemu.

Celkový objem tělesa je

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 \cdot 4 = \frac{16\pi}{3}.$$

Podle zadání tvoří menší část $\frac{1}{3}$ větší části. Z toho vychází, že objem menší části je

$$V_{\text{menší}} = \frac{1}{4}V = \frac{4\pi}{3}$$

a objem větší části je

$$V_{\text{větší}} = \frac{3}{4}V = 4\pi.$$

Rovina $x = a$ vytvoří v pravé části (pro $x \in \langle a, 4\rangle$) kužel s výškou

$$v' = 4 - a$$

a poloměrem podstavy v místě řezu

$$r' = f(a) = 2 - \frac{a}{2} = \frac{4-a}{2}.$$

Objem tohoto odříznutého kužele $V_{\text{malý kužel}}$ spočítáme dosazením do vzorce pro objem kužele:

$$V_{\text{malý kužel}} = \frac{1}{3}\pi (r')^2 v'.$$

Tedy

$$V_{\text{malý kužel}} = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{4-a}{2}\right)^2 (4-a),$$

a proto

$$V_{\text{malý kužel}} = \frac{\pi}{12}(4-a)^3.$$

Protože není předem určeno, která z částí je menší, nastávají dva případy:

1. možnost: Pravý kužel u vrcholu je menší díl

V tomto případě

$$V_{\text{malý kužel}} = \frac{4\pi}{3}.$$

Tedy

$$\frac{\pi}{12}(4-a)^3 = \frac{4\pi}{3},$$

$$(4-a)^3 = 16,$$
$$4-a = 2\sqrt[3]{2},$$
$$-a = -4 + 2\sqrt[3]{2},$$
$$a = 4 - 2\sqrt[3]{2} \doteq 1{,}48.$$

2. možnost: Pravý kužel u vrcholu je větší díl

V tomto případě

$$V_{\text{malý kužel}} = 4\pi.$$

Tedy

$$\frac{\pi}{12}(4-a)^3 = 4\pi,$$
$$(4-a)^3 = 48,$$
$$4-a = 2\sqrt[3]{6},$$
$$-a = -4 + 2\sqrt[3]{6},$$
$$a = 4 - 2\sqrt[3]{6} \doteq 0{,}37.$$

Výsledek

Řešením jsou hodnoty a:

$$a_1 = 4 - 2\sqrt[3]{2} \doteq 1{,}48,$$
$$a_2 = 4 - 2\sqrt[3]{6} \doteq 0{,}37.$$

Poznámka: Existují i jiné způsoby řešení tohoto příkladu. Můžeme využít stejnou myšlenku, jako jsme použili výše, jen se vzorcem pro objem komolého kužele

$$V_{\text{komolý}} = \frac{1}{3}\pi v \left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right).$$

Další možností je využít podobnosti mezi původním kuželem a kuželem, který vznikne po rozříznutí rovinou, a vlastnosti, že poměr objemů dvou podobných těles je roven třetí mocnině koeficientu podobnosti.

Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, příspěvková organizace

Sborník příkladů ze soutěže
Moravskoslezský matematický šampionát 2026

Ostrava 22. 10. 2026

Název	Moravskoslezský matematický šampionát 2026
Editor	Mgr. Jana Gajdušková
Vydavatel	Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, p. o. Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
Náklad	350 ks
Rozsah	28 stran
Vydání	první, 2026, revize 1
Tisk	Printo, spol. s r.o.
Doporučená cena	zdarma

Texty neprošly jazykovou úpravou.