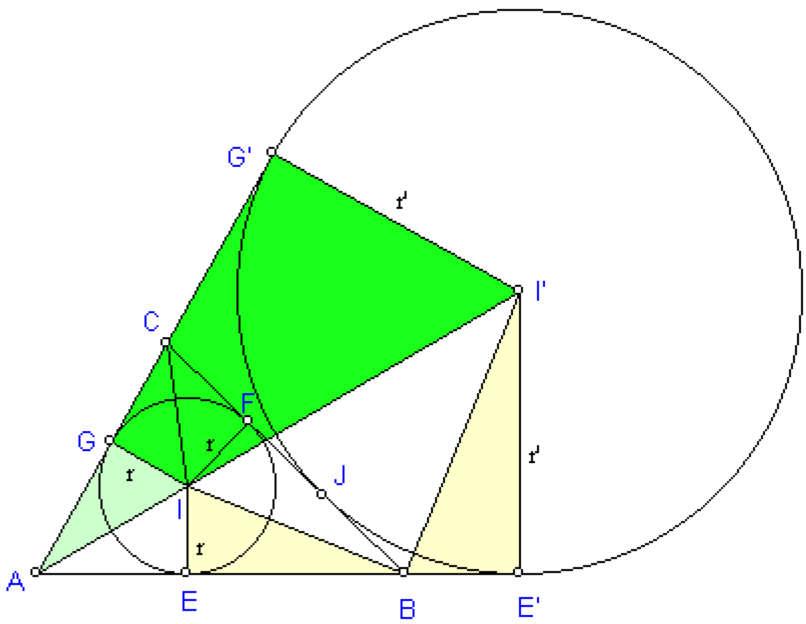
GEOMETRICKÉ ODVOZENÍ HERONOVA VZORCE

Vyjdeme z tohoto označení v trojúhelníku:



Strany v trojúhelníku jsou $a = BC, b = AC, c = AB$. Polovina obvodu $\frac{a+b+c}{2}$ nechť je označena s.

1 Vycházejme z předpokladu, že délky tečen ke kružnici z jednoho daného bodu jsou shodné. Pro velikosti úseček platí: $AE = AG$, $CG = CF$ a $BE = BF$. Z toho vyplývá:

$$AE + EB + CG = c + CG = s$$

$$CG = s - c$$

Stejným způsobem dojdeme k vyjádření:

$$CF = s - c$$

$$AG = AE = s - a$$

$$BE = BF = s - b$$

2 Ze stejné vlastnosti tečen platí: $AE' = AG$, $BE' = BJ$ a $CG' = CJ$

$$AG' + AE' = AB + BJ + CJ + AC = 2s$$

$$AG' = AE' = s$$

$$BE' = s - c$$

3 Oba středy I a I' leží na ose úhlu α. I' zároveň leží na osách vedlejších úhlů k úhlům β a γ. Osy těchto úhlů jsou tedy kolmé k příslušným osám vnitřních úhlů trojúhelníka *ABC*.

4 Z bodu *3* vyplývá, že trojúhelníky *EBI* a $E'I'B$ jsou podobné. Pro délky stran pak platí:

$$\frac{E'I'}{E'B} = \frac{EB}{EI}$$

$$\frac{r'}{s-c} = \frac{s-b}{r}$$

a z toho:

$$r.r' = (s-b).(s-c) \;\ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

5 Rovněž trojúhelníky *AIG* a $AI'G'$ jsou podobné. Proto pak platí:

$$\frac{IG}{I'G'} = \frac{AG}{A'G'}$$

$$\frac{r}{r'} = \frac{s-a}{s} \;\ldots\ldots\ldots\ldots [2]$$

6 Úpravou rovnic $[1]$ a $[2]$ získáme vztah:

$$r^2 = \frac{(s-a).(s-b).(s-c)}{s}$$

$$r = \sqrt{\frac{(s-a).(s-b).(s-c)}{s}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots [3]$$

7 Není těžké dokázat, že obsah trojúhelníka lze vyjádřit pomocí poloměru kružnice vepsané vztahem $S = s.r$. Dosadíme do tohoto vzorce rovnici $[3]$:

$$S = s.\sqrt{\frac{(s-a).(s-b).(s-c)}{s}}$$

Po jednoduché úpravě dostaneme právě Heronův vzorec:

$$S = \sqrt{s.(s-a).(s-b).(s-c)}$$

Při zpracování důkazu bylo využito práce Dr. Paula Yiu z Florida Atlantic University, publikované v „Advanced Euclidean Geometry“ v roce 1992. Další používáni textu je možné pro výuku, vědu a výzkum v souladu s Bernskou konvencí.