Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba,
příspěvková organizace

Seminární práce z matematiky

Množina bodů daných vlastností

Autor: Ondřej Vejpustek
Vyučující: RNDr. Eva Davidová

Ostrava, 2011

Zadání

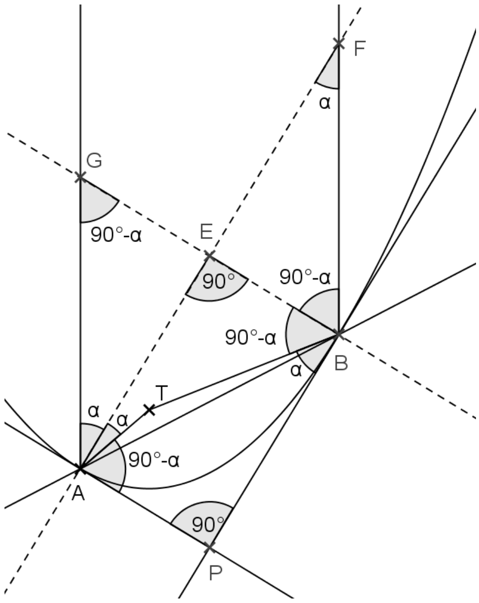
Najděte množinu bodů, ze kterých vedené tečny k parabole svírají pravý úhel.

Planimetrická konstrukce

Důkaz pomocné věty

Abychom mohli sestrojit dvojici tečen na sebe kolmých, dokážeme, že spojnice bodů dotyku těchto tečen prochází ohniskem paraboly.

Mějme parabolu s ohniskem T a její dvě tečny, které jsou na sebe kolmé, body dotyku tečen označme A, B. V bodech A, B sestrojme kolmice na tečny a jejich průsečík nazvěme E. Dále v bodech A, B sestrojme rovnoběžky s hlavní osou paraboly a jejich průsečíky s přímkami $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{AE}$ nazvěme G, F.



Jelikož jsou všechny úhly $\measuredangle BPA$, $\measuredangle PAE$ a $\measuredangle PBE$ pravé, pravý bude taky úhel $\measuredangle AEB$.

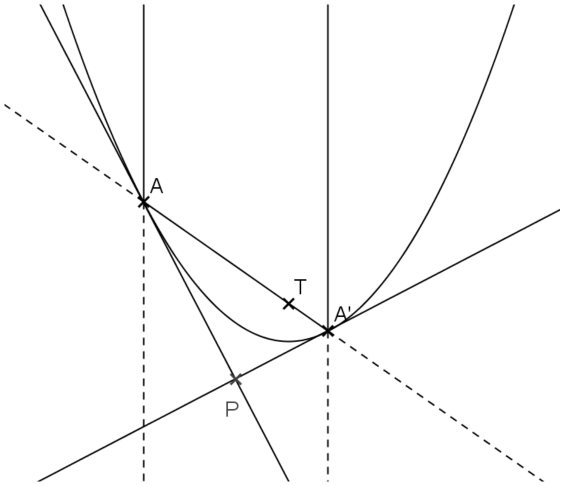
Trojúhelníky $\triangle EAG$ a $\triangle EFB$ jsou si podobné podle věty UU (vrcholové, střídavé úhly). Pokud velikost úhlu $\measuredangle EAG$ označíme α, bude velikost úhlu $|\measuredangle EGA| = 90° - \alpha$ (součet úhlů v pravoúhlém trojúhelníku $\triangle EAG$), velikost úhlu $|\measuredangle EFB| = \alpha$ (úhel shodný s úhlem $\measuredangle EAG$), velikost úhlu $|\measuredangle EBF| = 90° - \alpha$ (úhel shodný s úhlem $\measuredangle EGA$).

Jelikož osa tečny ($\overleftrightarrow{AE}$) v bodě dotyku půlí úhel, který svírají průvodiče v bodě dotyku, platí, že $|\measuredangle TAE| = |\measuredangle GAE| = \alpha$ a podobně $|\measuredangle TBE| = |\measuredangle FBE| = 90° - \alpha$. Doplněním do pravého úhlu je úhel $|\measuredangle TAP| = 90° - \alpha$ a úhel $|\measuredangle TBP| = \alpha$. Uvažujme čtyřúhelník $APBT$, který má součet vnitřních úhlů $|\measuredangle TAP| + |\measuredangle TBP| + |\measuredangle APB| + |\measuredangle BTA| = 180° + |\measuredangle BTA| = 360°$. A proto je velikost úhlu $|\measuredangle BTA| = 180°$ a to znamená, že bod T leží na úsečce AB.

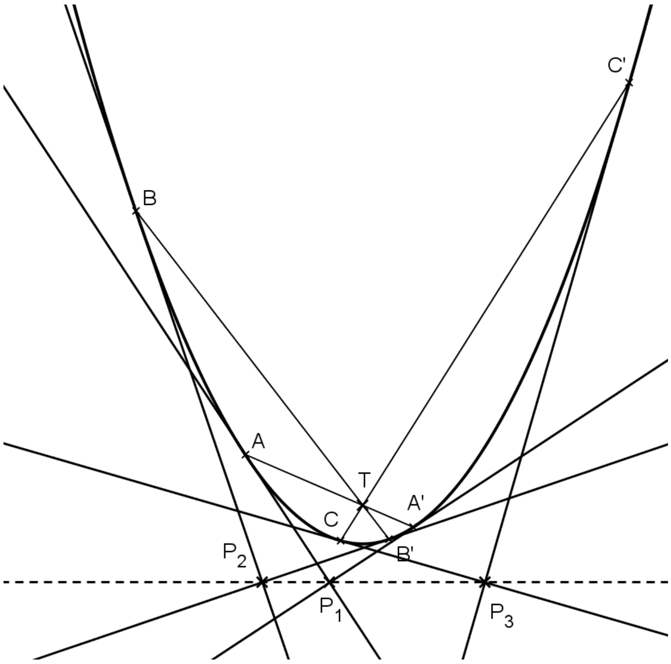
Konstrukce

Pomoci dokázané věty můžeme sestrojit dvojici na sebe kolmých tečen a jejich průsečík (tedy bod, ze kterého vedené tečny k parable svírají pravý úhel).

Postup je následovný: Zvolíme na parabole libovolný bod A. Tímto bodem vedeme tečnu k parabole, která je vnější osou úhlu, který svírají průvodiče v tomto bodě (tedy spojnice s ohniskem a rovnoběžka s hlavní osou paraboly). Prodloužíme spojnici bodu A s ohniskem, její průsečík s parabolou bude bodem A', ze kterého vedeme druhou tečnu. Průsečík těchto tečen bude bod P, který je prvkem hledané množiny bodů.



Konstrukce pro $p = 1$ ukazuje, že by všechny průsečíky mohly ležet na přímce, a navíc, že touto přímkou by mohla být přímka řídící.



Analytické řešení

Mějme parabolu

$$x^2 = 2py,$$

kde $p \neq 0$ je parametr hyperboly.

Tečna k parabole v bodě paraboly $[x_0, y_0]$ má rovnici $xx_0 = py + py_0$. Souřadnici y_0 můžeme vyjádřit jako $y_0 = \frac{x_0^2}{2p}$. Rovnice tečny bude

$$2xx_0 - 2py = x_0^2.$$

Hledáme jinou tečnu, která bude na tuto tečnu kolmá. Nechť má její bod dotyku souřadnice $[x_1, y_1]$. Tečna bude mít rovnici:

$$2xx_1 - 2py = x_1^2$$

Jestliže platí, že je kolmá na původní tečnu, bude skalární součin normálových vektorů tečen roven nule:

$$\begin{aligned} 4x_0x_1 + 4p^2 &= 0 \\ x_1 &= \frac{-p^2}{x_0} \end{aligned}$$

Rovnice druhé tečny bude mít tvar:

$$2xx_0p^2 + 2pyx_0^2 = -p^4.$$

Průsečík obou tečen najdeme jako řešení soustavy rovnic:

$$\begin{aligned} 2xx_0 - 2py &= x_0^2 \\ 2xx_0p^2 + 2pyx_0^2 &= -p^4 \\ 2xx_0^3 - 2pyx_0^2 &= x_0^4, \quad x_0 \neq 0 \\ 2xx_0p^2 + 2pyx_0^2 &= -p^4 \\ 2xx_0(x_0^2 + p^2) &= x_0^4 - p^4 \\ x &= \frac{x_0^2 - p^2}{2x_0} = \frac{x_0}{2} - \frac{p^2}{2x_0}, \quad x_0^2 + p^2 \neq 0 \\ y &= \frac{2xx_0 - x_0^2}{2p} = \frac{-p}{2} \end{aligned}$$

Hledanou množinou jsou všechny body $[\frac{x_0}{2} - \frac{p^2}{2x_0}, \frac{-p}{2}]$, pro $x_0 \in \Re \setminus \{0\}$ (případ $x_0^2 + p^2 = 0$ nemůže nastat). Obor hodnot funkce $y = \frac{x}{2} - \frac{p^2}{2x}$ jsou všechna $\Re$. Hledanou množinou je tedy přímka s rovnicí:

$$y = \frac{-p}{2}$$

Abstrakce od souřadného systému

Jestliže nebude parabola umístěná do středu souřadného systému, můžeme použít souřadný systém takový, který má počátek ve vrcholu paraboly a osa y splývá s hlavní osou paraboly. V tom případě bude hledanou množinou přímka rovnoběžná s vrcholovou tečnou ve vzdálenosti $\frac{p}{2}$ v opačné polorovině, než do které se rozevírá parabola. Přímka takových vlastností se nazývá řídící přímka.