Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba,
příspěvková organizace

Seminární práce z matematiky

Vyšetřování průběhu funkcí

Autor: Ondřej Vejpustek
Vyučující: RNDr. Eva Davidová

Ostrava, 2011

1 Taylorův polynom pro $\sin(x)$

Vyšetřete funkci $f_1(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$.

Definiční obor není nijak omezen, proto $\mathsf{D}_{f_1} = \Re$. Protože $f_1(-x) = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} = -f_1(x) \neq f_1(x)$, funkce je lichá a není sudá. Funkce není periodická. Limity v nevlastních bodech:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f_1(x) &= \lim_{x\to\infty} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = \infty \\ \lim_{x\to-\infty} f_1(x) &= \lim_{x\to-\infty} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = -\infty \end{aligned}$$

Protože funkce je spojitá určíme $\mathsf{H}_{f_1} = \Re$

Protože $f_1(0) = 0$, prochází graf funkce počátkem soustavy souřadnic. Průsečíky s osou x nalezneme vyřešením rovnice:

$$\begin{aligned} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} &= 0 \\ x(x^4 - 20x^2 + 120) &= 0 \end{aligned}$$

Jelikož bikvadratická rovnice nemá žádný kořen, neexistuje žádný další průsečík s osou x. Výpočet 1. derivace:

$$f_1'(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

Funkce má derivaci ve všech bodech. Stacionární body:

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= 0 \\ 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} &= 0 \\ x^4 - 12x^2 + 24 &= 0 \\ 0 &= \left(x - \sqrt{6+2\sqrt{3}}\right)\left(x - \sqrt{6-2\sqrt{3}}\right)\left(x + \sqrt{6+2\sqrt{3}}\right)\left(x + \sqrt{6-2\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

Stacionární body mají přibližné souřadnice[1] $S_1[3{,}08; 0{,}52]$, $S_2[1{,}59; 1{,}00]$, $S_3[-3{,}08; -0{,}52]$, $S_4[-1{,}59; -1{,}00]$.

Intervaly monotonie:

$$\begin{array}{ll} \left(-\infty; -\sqrt{6+2\sqrt{3}}\right) & \text{rostoucí} \\ \left(-\sqrt{6+2\sqrt{3}}; -\sqrt{6-2\sqrt{3}}\right) & \text{klesající} \\ \left(-\sqrt{6-2\sqrt{3}}; \sqrt{6-2\sqrt{3}}\right) & \text{rostoucí} \\ \left(\sqrt{6-2\sqrt{3}}; \sqrt{6+2\sqrt{3}}\right) & \text{klesající} \\ \left(\sqrt{6+2\sqrt{3}}; \infty\right) & \text{rostoucí} \end{array}$$

---

[1]

$$\begin{aligned} f_1(3{,}08) &\doteq f_1(\sqrt{6+2\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt{2(\sqrt{3}+3)^5}}{30} - \frac{\sqrt{2(\sqrt{3}+3)^3}}{3} + \sqrt{2(\sqrt{3}+3)} \doteq 0{,}52 \\ f_1(1{,}59) &\doteq f_1(\sqrt{6-2\sqrt{3}}) = \frac{\sqrt{2(\sqrt{3}-3)^5}}{30} - \frac{\sqrt{2(\sqrt{3}-3)^3}}{3} + \sqrt{2(\sqrt{3}-3)} \doteq 1{,}00 \\ f_1(-3{,}08) &\doteq f_1(-\sqrt{6+2\sqrt{3}}) = -\frac{\sqrt{2(\sqrt{3}+3)^5}}{30} + \frac{\sqrt{2(\sqrt{3}+3)^3}}{3} - \sqrt{2(\sqrt{3}+3)} \doteq -0{,}52 \\ f_1(-1{,}59) &\doteq f_1(-\sqrt{6-2\sqrt{3}}) = -\frac{\sqrt{2(\sqrt{3}-3)^5}}{30} + \frac{\sqrt{2(\sqrt{3}-3)^3}}{3} - \sqrt{2(\sqrt{3}-3)} \doteq -1{,}00 \end{aligned}$$

Výpočet 2. derivace:

$$f_1''(x) = -x + \frac{x^3}{3!}$$

Funkce má druhou derivaci ve všech bodech. Inflexní body:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ -x + \frac{x^3}{3!} &= 0 \\ x^3 - 6x &= 0 \\ x(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6}) &= 0 \end{aligned}$$

Inflexní body mají přibližné souřadnice[2] $I_1[0;0]$, $I_2[2{,}45;0{,}73]$, $I_2[-2{,}45;-0{,}73]$.

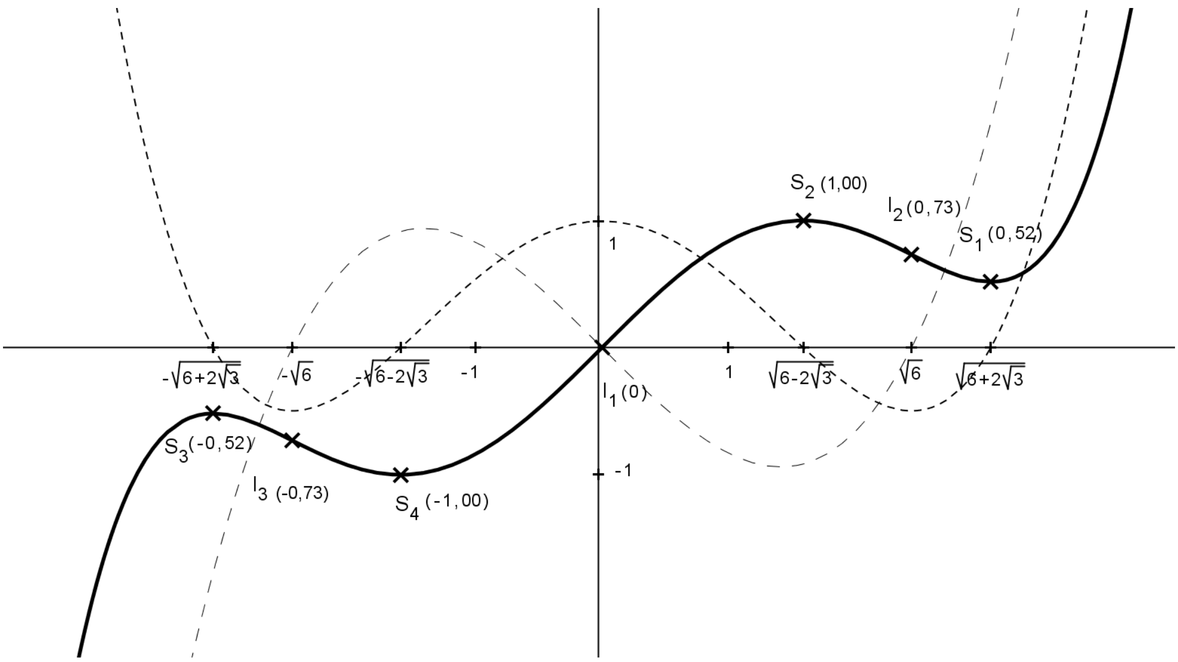
Intervaly konkávnosti, konkávnosti:

$(-\infty;-\sqrt{6})$	konkávní
$(-\sqrt{6};0)$	konvexní
$(0;\sqrt{6})$	konkávní
$(\sqrt{6};\infty)$	konvexní

Lokální extrémy:

lokální maxima	$S_2[1{,}59;1{,}00]$, $S_3[-3{,}08;-0{,}52]$
lokální minima	$S_1[3{,}08;0{,}52]$, $S_4[-1{,}59;-1{,}00]$

Graf funkce:



2

$$f_1(2{,}45) \doteq f_1(\sqrt{6}) = \frac{3\sqrt{6}}{10} \doteq 0{,}73$$

$$f_1(-2{,}45) \doteq f_1(-\sqrt{6}) = \frac{-3\sqrt{6}}{10} \doteq -0{,}73$$

2 Funkce $\frac{1}{x^x}$

Vyšetřete průběh funkce $\frac{1}{x^x}$.

Funkci přepíšeme: $\frac{1}{x^x} = \frac{1}{e^{x \ln x}}$. Logaritmus je definován pro kladný argument, proto $\mathsf{D}_{f_2} = (0; \infty)$. Funkce tudíž není ani sudá ani lichá a není ani periodická.

Limity v nevlastním bodě a v krajním bodě definičního oboru:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f_2(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x \ln x}} = 0 \\
\lim_{x\to 0} f_2(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{x \ln x}} = \frac{1}{e^{\lim_{x\to 0} x \ln x}} = \frac{1}{e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}} = \frac{1}{e^{\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}} = \frac{1}{e^{\lim_{x\to 0} -x}} = 1
\end{aligned}$$

Protože $0 \notin \mathsf{D}_{f_2}$, graf funkce nemá průsečík s osou y. Protože hodnota exponenciální funkce je kladná, graf funkce nemá průsečík ani s osoou y.

Výpočet 1. derivace:

$$f_2'(x) = (e^{x \ln \frac{1}{x}})' = \frac{1}{x^x}\left(\ln \frac{1}{x} - 1\right)$$

Funkce má derivaci v celém D_{f_2}. Stacionární body:

$$\begin{aligned}
f_2'(x) &= 0 \\
\frac{1}{x^x}\left(\ln \frac{1}{x} - 1\right) &= 0 \\
\ln \frac{1}{x} &= 1 \\
x &= \frac{1}{e}
\end{aligned}$$

Stacionární bod má souřadnice $S_1\left[e^{-1}; e^{e^{-1}}\right]$[3].

Intervaly monotonie:

$\left(0; e^{-1}\right)$	rostoucí
$\left(e^{-1}; \infty\right)$	klesající

Výpočet 2. derivace:

$$f_2''(x) = \left[\frac{1}{x^x}\left(\ln \frac{1}{x} - 1\right)\right]' = \frac{1}{x^x}\left(\ln \frac{1}{x} - 1\right)^2 - \frac{1}{x^x}\frac{1}{x} = \frac{1}{x^x}\left[\left(\ln \frac{1}{x} - 1\right)^2 - \frac{1}{x}\right]$$

Funkce má druhou derivaci v celém D_{f_2}. Inflexní body:

$$\begin{aligned}
f_2''(x) &= 0 \\
\frac{1}{x^x}\left[\left(\ln \frac{1}{x} - 1\right)^2 - \frac{1}{x}\right] &= 0 \\
\left(\ln \frac{1}{x} - 1\right)^2 &= \frac{1}{x}; \quad a = \frac{1}{x} \\
|\ln a - 1| &= \sqrt{a}
\end{aligned}$$

Jedinným řešením rovnice[4] je inflexní bod má souřadnice $I_1[1; 1]$.

[3] $e^{-1} \doteq 0{,}37, \quad e^{e^{-1}} \doteq 1{,}44$

[4] To, že existuje pouze jedno řešení, vyplývá ze složitějšího rozboru funkcí $g(x) = |\ln x - 1|$ a $h(x) = \sqrt{a}$: Analyzujeme funkce ve třech intervalech $(0; e)$, $(e; 4)$ a $(4; \infty)$, obě dvě funkce jsou ve všech třech intervalech spojité a monotónní, proto může být v každém intervalu nejvýše jeden průsečík jejich grafů. Protože $h(e) > g(e)$ a $h(4) > g(4)$, platí pro $\forall x \in (e; 4) : h(x) > h(x)$, grafy funkcí tudíž nemají v tomto intervalu žádný průsečík. Protože v intervalu $(4; \infty)$ platí, že $h'(x) > g'(x)$ a $h(4) > g(4)$, platí $\forall x \in (4; \infty) : h(x) > g(x)$, grafy funkcí tudíž nemají ani v tomto intervalu žádný průsečík. Funkce mají nejvýše jeden průsečík, a to v intervalu $(0; e)$.

Intervaly konkávnosti, konvexnosti:

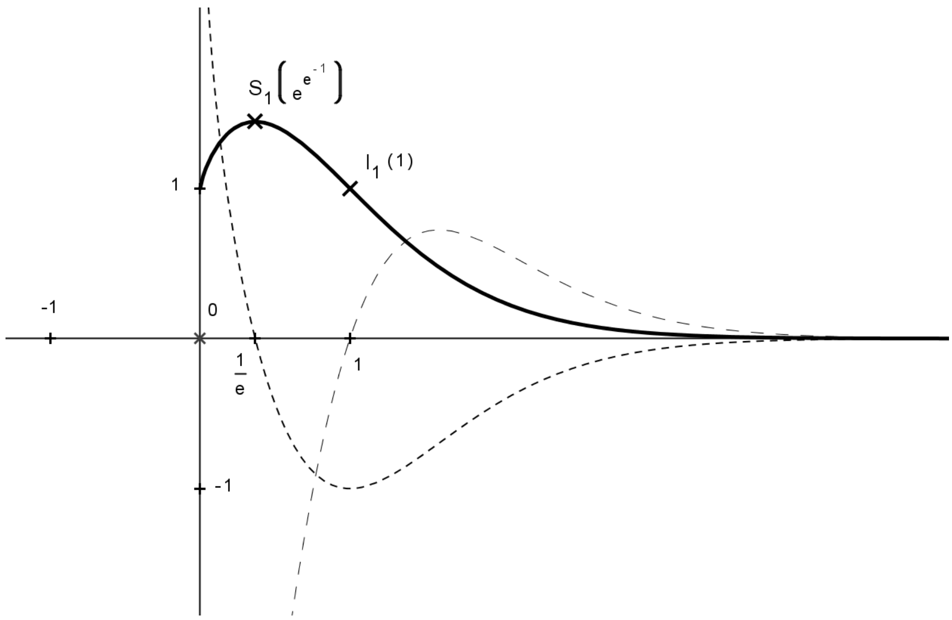
$(0;1)$	konkávní
$(1;\infty)$	konvexní

Lokální extrémy:

lokální maximum $\quad S_1\left[e^{-1};e^{e^{-1}}\right]$

Funkce má asymptotu $y=0$.

Graf funkce:



3 Gaussova funkce

Vyšetřete průběh Gaussovy funkce ve tvaru:

$$f_3(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

, kde $\mu \in \Re$ je střední hodnota a $\sigma^2 > 0$ je rozptyl.

Definiční obor není nijak omezen, proto $\mathsf{D}_{f_3} = \Re$. Podmínky, sudosti funkce:

$$\begin{aligned}
f_3(x) &= f_3(-x) \\
\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \\
-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} &= -\frac{(-x-\mu)^2}{2\sigma^2} \\
(x-\mu)^2 &= (-x-\mu)^2 \\
|x-\mu| &= |x+\mu| \\
\mu &= 0
\end{aligned}$$

Funkce je sudá pro $\mu = 0$. Jelikož obor hodnot je podmnožinou $\Re^+$, funkce není lichá. Funkce není ani periodická.

Limity v nevlastních bodech:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} f_3 &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\lim_{x\to\infty} -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0 \\
\lim_{x\to-\infty} f_3 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\lim_{x\to-\infty} -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = 0
\end{aligned}$$

Průsečík grafu funkce s osou y:

$$f_3(0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}$$

Graf funkce má průsečík s osou y v bodě $P\left[0; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}\right]$.

Jelikož obor hodnot je podmnožinou $\Re^+$, graf funkce nemá průsečík s osou x.

Výpočet 1. derivace:

$$f_3'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]' = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{-2(x-\mu)}{2\sigma^2} = \frac{\mu - x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Funkce má derivaci ve všech bodech. Stacionární body:

$$\begin{aligned}
f_3'(x) &= 0 \\
\frac{\mu - x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} &= 0 \\
x &= \mu
\end{aligned}$$

Stacionární bod má souřadnice $S_1\left[\mu; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right]$.

Intervaly monotonie:

$(-\infty, \mu)$	rostoucí
(μ, ∞)	klesající

Výpočet 2. derivace:

$$f_3''(x) = \left[\frac{\mu - x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right]' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \frac{\mu - x}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{\mu - x}{\sigma^2} = \left[\frac{(\mu - x)^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\right] e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Funkce má 2. derivaci ve všech bodech. Inflexní body:

$$\begin{aligned}
f_3''(x) &= 0 \\
\left[\frac{(\mu - x)^2}{\sigma^5\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\right] e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} &= 0 \\
(\mu - x)^2 &= \sigma^2 \\
|\mu - x| &= |\sigma| \\
x &= \mu \pm \sigma
\end{aligned}$$

Souřadnice inflexních bodů jsou $I_1\left[\mu + \sigma; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right]$, $I_2\left[\mu - \sigma; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right]$.

Intervaly konkávnosti, konvexnosti:

$(-\infty; \mu - \sigma)$	konvexní
$(\mu - \sigma; \mu + \sigma)$	konkávní
$(\mu + \sigma; \infty)$	konvexní

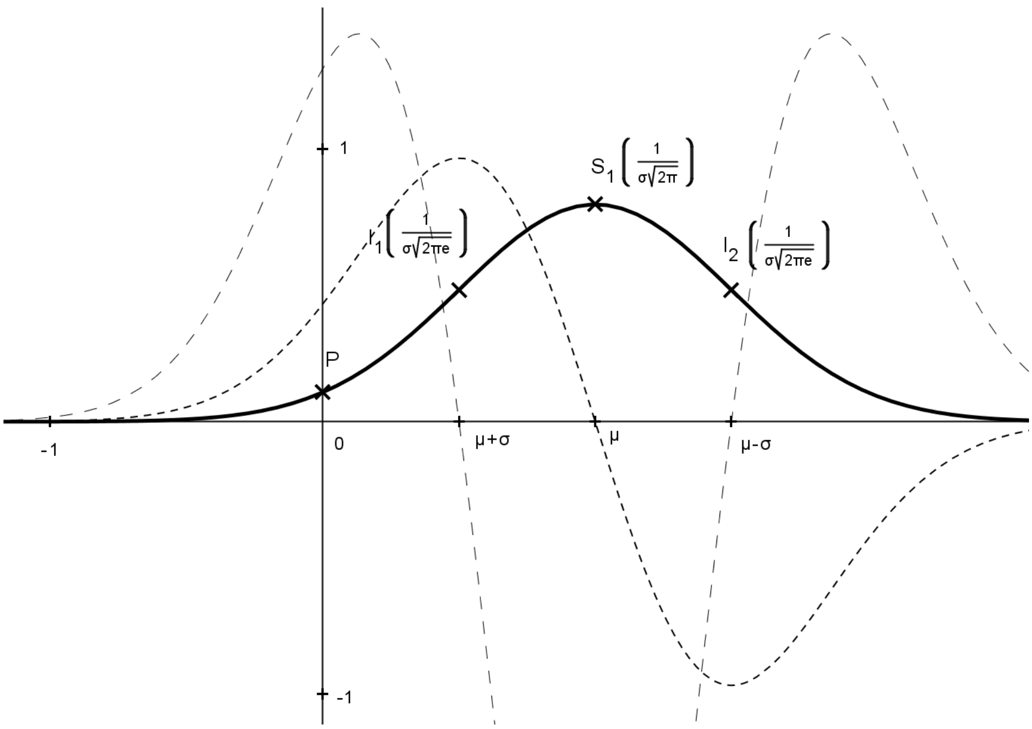
Lokální extrémy:

lokální maximum $S_1\left[\mu; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right]$

Obor hodnot je $\mathsf{H}_{f_3} = \left(0; \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right\rangle$.

Funkce má asymptotu $y = 0$.

Graf funkce pro $\mu = 1$ a $\sigma = \frac{1}{2}$:



4 Eliptická křivka $y^2 = x^3 - 2x + 1$

Vyšetřete průběh funkce $y = \sqrt{x^3 - 2x + 1}$.

Funkce je definovaná pro ta x, pro která je výraz pod odmocninou nezáporný:

$$\begin{aligned} x^3 - 2x + 1 &\geq 0 \\ (x + \frac{\sqrt{5}+1}{2})(x + \frac{1-\sqrt{5}}{2})(x-1) &\geq 0 \end{aligned}$$

Proto $\mathsf{D}_{f_4} = \left\langle -\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right\rangle \cup \langle 1; \infty)$. Protože $f_4(-x) = \sqrt{-x^3 + 2x + 1} \neq f_4(x) \neq -f_4(x)$, funkce není ani lichá ani sudá, není ani periodická.

Limita v nevlastním bodě:

$$\lim_{x\to\infty} f_4 = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^3 - 2x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}}{\frac{1}{\sqrt{x^3}}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{x^3} = \infty$$

Graf funkce má tři průsečíky[5] s osou x: $P_1\left[-\frac{\sqrt{5}+1}{2}; 0\right]$, $P_2\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 0\right]$ a $P_3\,[1;0]$. Průsečík s osou y je v bodě $f_4(0) = 1$ a má souřadnice $P_4[0;1]$

Výpočet 1. derivace:

$$f_4' = \frac{3x^2 - x}{2\sqrt{x^3 - 2x + 1}}$$

Definiční obor derivace je $\mathsf{D}_{f_4'} = \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup (1; \infty)$. Stacionární body:

$$\begin{aligned} f_4'(x) &= 0 \\ \frac{3x^2 - x}{2\sqrt{x^3 - 2x + 1}} &= 0 \\ 3x^2 - 2 &= 0 \\ x &= \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$

Protože bod $\frac{\sqrt{6}}{3}$ není v definičním oboru funkce, jediným stacionárním bodem[6] je bod $S_1\left[-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{4\sqrt{6}+9}}{3}\right]$.

Intervaly monotonie:

$\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$	rostoucí
$\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$	klesající
$(1; \infty)$	rostoucí

Výpočet druhé derivace:

$$f_4''(x) = \left(\frac{3x^2 - x}{2\sqrt{x^3 - 2x + 1}}\right)' = \frac{12x\sqrt{x^3 - 2x + 1} - \frac{(3x^2-2)^2}{\sqrt{x^3-2x+1}}}{4(x^3 - 2x + 1)} = \frac{3x^4 - 12x^2 + 12x - 4}{4\sqrt{(x^3 - 2x + 1)^3}}$$

Definiční obor 2. derivace je $\mathsf{D}_{f_4''} = \left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup (1; \infty)$. Inflexní body:

[5] $-\frac{\sqrt{5}+1}{2} \doteq -1{,}62$, $\frac{\sqrt{5}-1}{2} \doteq 0{,}62$

[6] $-\frac{\sqrt{6}}{3} \doteq 0{,}82$, $\frac{\sqrt{4\sqrt{6}+9}}{3} \doteq 1{,}45$

$$\begin{aligned} f_4''(x) &= \quad = 0 \\ \frac{3x^4 - 12x^2 + 12x - 4}{4\sqrt{(x^3 - 2x + 1)^3}} &= 0 \\ 3x^4 - 12x^2 + 12x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Kořeny této rovnice numericky vyčíslené na počítači jsou $x_1 \doteq -2{,}42$ a $x_2 \doteq 1{,}32$. Protože kořen x_1 se nachází mimo definiční obor funkce f_4, funkce má jediný inflexní bod s přibližnými souřadnicemi $I_1[1{,}32; 0{,}80]$.

Intervaly konkávnosti, konvexnosti:

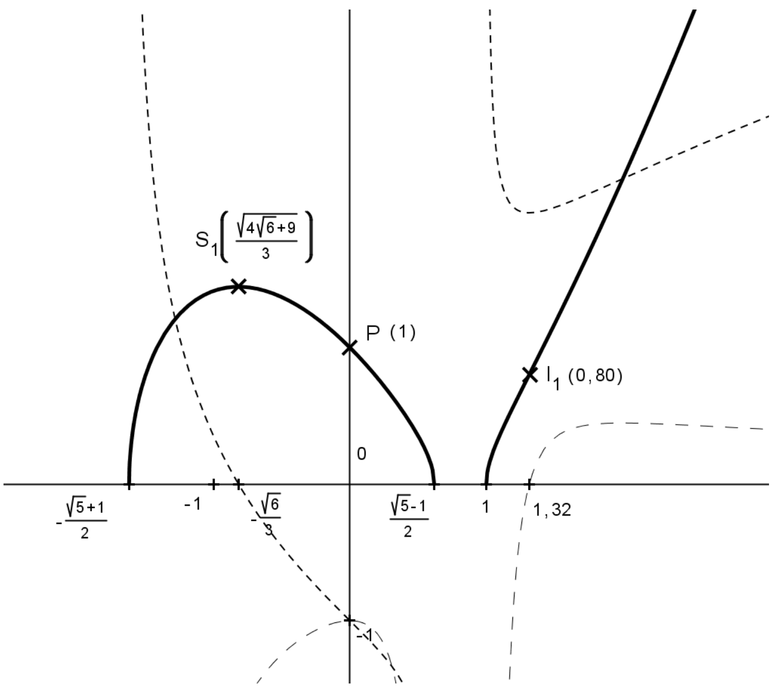
$\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$	konkávní
$(1; 1{,}32)$	konkávní
$(1{,}32; \infty)$	konvexní

Lokální extrémy:

lokální maximum $\quad S_1\left[-\frac{\sqrt{6}}{3}; \frac{\sqrt{4\sqrt{6}+9}}{3}\right]$

Obor hodnot je $\mathsf{H}_{f_4} = (0; \infty)$.

Graf funkce:



5 Trochoid

Vyšetřete funkci zadanou parametricky:

$$f_5(x) \begin{cases} \phi(\theta) : x = \pi\theta - 2\pi \sin\theta \\ \psi(\theta) : y = \pi - 2\pi \cos\theta \end{cases}$$

Definiční obor funkce f_5 je roven oboru hodnot funkce ϕ, proto $\mathsf{D}_{f_5} = \mathsf{H}_\phi = \Re$. Obor hodnot funkce f_5 je roven oboru hodnot funkce ψ, proto $\mathsf{H}_{f_5} = \mathsf{H}_\psi = \langle -\pi; 3\pi \rangle$.

Pro průsečík s osou x platí, že $y = \psi(\theta) = 0$, tedy:

$$\begin{aligned} 0 &= \pi - 2\pi\cos\theta \\ \cos\theta &= \frac{1}{2} \\ \theta &= \frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi; \quad k \in \mathbb{Z} \\ \phi\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right) &= = \frac{\pi^2}{3} - \sqrt{3}\pi + 2k\pi^2 \\ \phi\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right) &= = \frac{5\pi^2}{3} + \sqrt{3}\pi + 2k\pi^2 \end{aligned}$$

Souřadnice průsečíků[7] s osou x jsou $P_k\left[\frac{\pi^2}{3} - \sqrt{3}\pi + 2k\pi^2; 0\right]$ a $Q_k\left[\frac{5\pi^2}{3} + \sqrt{3}\pi + 2k\pi^2; 0\right]$.

Pro průsečík s osou y platí, že $x = \phi(\theta) = 0$, tedy:

$$\begin{aligned} 0 &= \pi\theta - 2\pi\sin\theta \\ \theta &\doteq \pm 1{,}90; 0 \\ \psi(1{,}90) &\doteq 5{,}15 \\ \psi(-1{,}90) &\doteq 5{,}15 \\ \psi(0) &= -\pi \end{aligned}$$

Přibližné souřadnice průsečíků[8] s osou y jsou $R_1[0; 1{,}90]$ a $R_2[0; -\pi]$.

Výpočet první derivace:

$$f_5'(\theta) = \frac{\psi'(\theta)}{\phi'(\theta)} = \frac{2\sin\theta}{1 - 2\cos\theta}$$

Derivace není definovaná v bodech $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, tedy v bodech P_k a Q_k. Stacionární body:

$$\begin{aligned} f_5'(\theta) &= 0 \\ \sin\theta &= 0 \\ \theta &= k\pi \end{aligned}$$

Souřadnice stacionárních bodů pro parametr $\theta = k\pi$:

$$\begin{aligned} \phi(k\pi) &= k\pi^2 \\ \psi(k\pi) &= -\pi; \text{pro sudá } k \\ \psi(k\pi) &= 3\pi; \text{pro lichá } k \end{aligned}$$

Souřadnice stacionárních bodů jsou $S_k[2k\pi^2; -\pi]$ a $T_k[(2k-1)\pi^2; -3\pi]$.

Intervaly monotonie:

[7] $\frac{\pi^2}{3} - \sqrt{3}\pi + 2k\pi^2 \doteq 19{,}74k - 2{,}15, \quad \frac{\pi^2}{3} + \sqrt{3}\pi \doteq 19{,}74k + 21{,}89 = 19{,}74k + 2{,}15$

[8] Kořeny byly numericky vypočítány na počítači.

$\left(2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$	klesající
$\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \pi + 2k\pi\right)$	rostoucí
$\left(\pi + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)$	klesající
$\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi; 2k\pi\right)$	rostoucí

Výpočet 2. derivace:

$$f_5''(\theta) = \frac{f_5''(\theta)}{\phi'(\theta)} = \frac{\left(\frac{2\sin\theta}{1-2\cos\theta}\right)'}{(\pi\theta - 2\pi\sin\theta)'} = \frac{\frac{(2\cos\theta)(1-2\cos\theta)-4\sin^2\theta}{(1-2\cos\theta)^2}}{\pi(1-2\cos\theta)} = \frac{2(\cos\theta - 2)}{\pi(1-2\cos\theta)^3}$$

Druhá derivace není definovaná v bodech $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$, tedy v bodech P_k a Q_k. Inflexní body:

$$\begin{aligned} f_4''(\theta) &= 0 \\ \frac{2(\cos\theta - 2)}{\pi(1-2\cos\theta)^3} &= 0 \\ \cos\theta &= 1 \\ \theta &= 2k\pi \end{aligned}$$

Souřadnice inflexních bodů:

$$\begin{aligned} \phi(2k\pi) &= 2k\pi^2 \\ \psi(2k\pi) &= -\pi \end{aligned}$$

Souřadnice inflexních bodů jsou $I_k[2k\pi^2; -\pi]$.

Intervaly konkávnosti, konvexnosti:

$\left(2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$	konvexní
$\left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right)$	konkávní
$\left(\frac{5\pi}{3} + 2k\pi; 2k\pi\right)$	konkávní

Lokální extrémy:

lokální minima	$S_k[2k\pi^2; -\pi]$
lokální maxima	$T_k[(2k-1)\pi^2; -3\pi]$

Graf funkce: