Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
příspěvková organizace

Moravskoslezský matematický šampionát 2009

Sborník

Ostrava-Poruba
22. 10. 2009

ISBN 978-80-87058-10-7

Organizační výbor

Mgr. Bc. Libor Klubal	hlavní organizátor
RNDr. Eva Davidová	odborný matematický dohled, editor sborníku
Mgr. Lada Stachovcová	technická podpora

Autoři a recenzenti

Mgr. Jana Gajdušková, Mgr. Petra Kňurová, Mgr. Tomáš Krchňák,

Mgr. Lenka Plášková, Mgr. Lada Stachovcová, RNDr. Michal Vavroš, PhD.

Mgr. Jan Šustek (PřF OSU)

Překlad do anglického jazyka

Bc. Věra Davidová, Mgr. Jan Netolička

Obsah

Úvodní slovo

Vážení a milí mladí přátelé,

závidím vám vaše mládí a vzpomínám na to své. Pamatuji si, že jsem hltal dobrodružné knížky, a že mne nejvíc bavily ty, které v sobě kromě dobrodružství měly také něco z vědy. Byly to například verneovky, ale vůbec nejvíc mne oslovily knížky našeho předního fyzika Františka Běhounka. Běhounek se zúčastnil polární výpravy vedené italským admirálem Umberto Nobilem. Letěli vzducholodí směrem nad severní pól, ale ztroskotali. Běhounek toto dobrodružství popsal v několika knížkách, ale kromě toho napsal vynikající knihy pro kluky o výpravách do Afriky, o zlatokopech a o cestách do Vesmíru. Ve všech jeho knihách se dobrodružství mísilo s vědou. A já v životě poznal, že věda sama a bádání jsou dobrodružstvím. Povedený pokus mně dával stejný pocit uspokojení jako vítězství ve sportu nebo zdolání nějaké překážky. Přeji vám, abyste i vy poznali báječné pocity, které věda poskytuje.

Prof. RNDr. Václav Pačes, DrSc.

Mipeleja

Zadání

Na kosmické lodi Mipeleja spolu cestují Persíni, Leonové a Lyriďané. Persínů je 13 %. Leonů je osmkrát víc než Lyriďanů. Určete nejmenší počet Persínů, Leonů a Lyriďanů na kosmické lodi Mipeleja.

Řešení

1. způsob

Poměr počtu Persínů k počtu Lyriďanů a Leonů je 13 : 87. Celkový počet Lyriďanů a Leonů musí být navíc dělitelný devíti, neboť Leonů je osmkrát více než Lyriďanů.

Poměr upravíme následovně:

$13 : 87 = 13 : (3 \cdot 29) = (3 \cdot 13) : (9 \cdot 29)$.

Odtud je vidět, že nejmenší počty obyvatel jsou následující:
Persínů je $3 \cdot 13 = 39$, Lyriďanů je 29 a Leonů je $8 \cdot 29 = 232$.

2. způsob

Označme x počet Persínů, y počet Leonů a z počet Lyriďanů. Potom $x = \frac{13}{100}(x + y + z)$ a $y = 8z$. Po dosazení

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{13}{100}(x + 9y) \\ 100x &= 13x + 117z \\ 87x &= 117z \end{aligned}$$

Odtud $3 \cdot 29x = 13 \cdot 9 \cdot z$. Řešení rovnice hledáme v oboru přirozených čísel (počty obyvatel), a tedy – Lyriďanů je $z = 29$, Persínů je $x = \frac{13 \cdot 9}{3} = 39$ a Leonů je $y = 8z = 232$.

Fotografie z konference

Zadání

Meziplanetární konference k výročí narození Gena Roddenberryho se zúčastnili delegáti ze dvou planet. Do konferenčního sálu je dopravovaly dva výtahy, každý byl určen pro jednu delegaci a každý měl kapacitu 9 osob. První delegace měla v poslední várce ještě 5 volných míst a druhá delegace při poslední jízdě nevyužila třetinu kapacity výtahu. Na místě konání si každý člen delegace první planety podal ruku s každým členem delegace z druhé planety, přičemž fotograf tuto skutečnost vždy zaznamenal.

Fotografie pak byly vystaveny na panelech 3×3, tj. po devíti kusech. Kolik míst bylo na posledním panelu prázdných, jestliže předchozí panely byly zcela zaplněny?

Řešení

První delegace měla $9k + 4$ členů, druhá delegace měla $9m + 6$ členů, kde k, m jsou nezáporná celá čísla. Podání rukou bylo

$$(9k + 4) \cdot (9m + 6) = 81km + 36m + 54k + 24.$$

První tři členy jsou dělitelné devíti. Zbývající člen 24 dává při dělení devíti zbytek 6, tj. na posledním panelu byla tři místa prázdná.

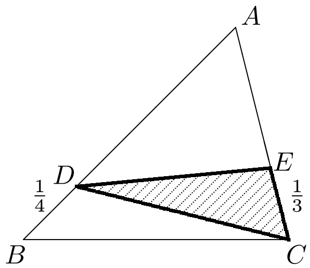
Planeta Triangl

Zadání

Na planetě Triangl jsou půdorysy všech pozemků a domů tvaru trojúhelníku. Trigonovi mají pozemek o výměře 40 tariků. Jejich dům je situován následovně:

- jeden roh domu splývá s rohem pozemku,
- druhý roh je ve čtvrtině protilehlé strany pozemku,
- třetí roh je ve třetině další strany, viz obr. 1.

Kolik tariků zaujímá půdorys domu?



Obr. 1

Řešení

Označme půdorys pozemku jako trojúhelník ABC a půdorys domu jako trojúhelník DCE, kde $|BD| = \frac{1}{4}|AB|$ a $|CE| = \frac{1}{3}|AC|$.

Označme S obsah trojúhelníku ABC a uvažme, že $S = \dfrac{|AB| \cdot v_c}{2}$. Výška v_c je pro trojúhelníky BCD a ABC společná, proto

$$S_{BCD} = \frac{1}{4}S.$$

Analogicky pro trojúhelníky ADC a DCE (v_d je společná) platí

$$S_{DCE} = \frac{1}{3}S_{ADC}.$$

Dále víme, že

$$S_{ADC} = S_{ABC} - S_{BCD} = \frac{3}{4}S.$$

Odtud dále

$$S_{DCE} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}S = \frac{1}{4}S.$$

Půdorys domu zaujímá $\frac{1}{4}$ výměry pozemku, tedy 10 tariků.

Galaktický čas

Zadání

V roce 2309 se galaktické shromáždění rozhodlo, že zavede nové, decimální počítání času. Den je od té doby rozdělen na 10 hodin, každá hodina na 100 minut a každá minuta na 100 sekund.

a) Na nových hodinách je čas 2:80:00. Jakému času používanému v roce 2009 tento nový čas odpovídá?

b) Jaký čas ukazují nové hodiny, je-li podle času používaného v roce 2009 právě 18:45:00?

Řešení

a) Čas 2:80 odpovídá 2,8 desetinám dne, je třeba jej převést na čtyřiadvacetiny, což je 6,72 čtyřiadvacetin, což odpovídá 6 hodinám 43 minutám a 12 sekundám.

b) Převedeme 18,75 čtyřiadvacetin na desetiny, dostáváme tak 0,78125 dne. Tedy hodiny ukázují 7:81:25.

Mise Dorado

Zadání

Xyva se ptá maminky: „Kdy se vrátí tatínek z mise Dorado?“

„Urči si nejmenší přirozené číslo, které je zapsané jen pomocí jedniček a nul a je dělitelné číslem 225. Když toto číslo najdeš a budeš na něj pohlížet jako na zápis čísla ve dvojkové soustavě, dostaneš po převedení do desítkové soustavy rok návratu tatínka.“

a) Jaké číslo našla Xyva?

b) Ve kterém roce se vrátí tatínek?

Řešení

a) Jelikož $225 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ je dělitelné 25-ti, musí hledané číslo končit na dvojčíslí 00. Současně ovšem musí být dělitelné devíti – nezbývá tedy, než že jeho ciferný zápis obsahuje devět jedniček. Dostáváme tak číslo

$$11111111100.$$

b) Ve dvojkové soustavě je pak

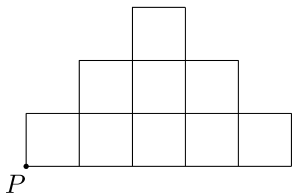
$$11111111100_{(2)} = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 + 2^2 = 2044_{(10)}.$$

Tatínek se vrátí z mise Dorado v roce 2044.

Mrtvá schránka

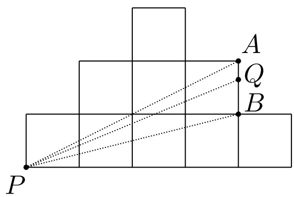
Zadání

Velení vesmírné lodi Enterprise obdrží další pokyny k přísně utajované misi až v mrtvé schránce uschované na planetě NY 02045. Vodítkem pro nalezení mrtvé schránky je mapa sestávající z 9 čtverců (viz obr. 2). Loď se nachází na pozici P. Kapitán obdržel pokyny, že schránku nalezne na okraji mapy v místě Q takovém, že přímá spojnice PQ rozdělí obrazec tvořený 9 čtverci na dva obrazce o stejném obsahu. Pomozte kapitánovi určit polohu schránky.



Obr. 2

Řešení



Obr. 3

Nad úsečkou PA je plocha o velikosti 4 čtverců, pod úsečkou PB plocha o velikosti 3 čtverce. Úsečka PQ musí tedy trojúhelník ABP rozdělit na dva mající poměry ploch: $S_{APQ} : S_{BQP} = 1 : 3$. Protože trojúhelníky mají stejné výšky, musí se v tomto poměru rozdělit základna AB. Hledaný bod Q – místo uložení mrtvé schránky – je tedy ve čtvrtině úsečky AB blíže k bodu A.

V kosmickém baru

Zadání

Jednoho večera se v Quarkově kosmickém baru setkaly posádky několika lodí Spojené federace planet. Každý z třiceti hostů umí aspoň jeden z těchto jazyků: andoriánsky, klingonsky nebo vulkánsky.

Andoriánsky umí 25 hostů, z nichž 6 umí i klingonsky. Počet hostů, kteří umí všechny tři jazyky, je stejný jako počet těch, kteří umí jen klingonsky, a také stejný jako počet hostů, kteří umí jen vulkánsky. Hostů, kteří umí klingonsky, je o 2 méně než těch, co umí vulkánsky. Hostů, kteří umí jen andoriánsky, je více než dvakrát tolik než těch, co umí jen andoriánsky a vulkánsky. Kolik hostů umí všechny tři jazyky?

Řešení

Počet hostů, kteří mluví všemi třemi jazyky, označíme x. Pak těch, co mluví jen klingonsky a andoriánsky, je $6 - x$. Vzhledem k tomu, že hostů, kteří mluví klingonsky, je o dva méně než těch, co mluví vulkánsky, je počet hostů mluvících jen vulkánsky a andoriánsky $8 - x$.

Andoriánsky mluví 25 táborníků, tedy jen andoriánsky umí

$$25 - (6 - x) - x - (8 - x) = 11 + x.$$

Celkový počet hostů je 30, tedy jen vulkánsky a klingonsky mluví

$$30 - (11 + x) - (6 - x) - x - (8 - x) - x - x = 5 - 2x.$$

Dále má platit, že hostů, kteří umí jen andoriánsky, je více než dvakrát tolik než těch, co umí jen andoriánsky a vulkánsky, tedy

$$11 + x > 2 \cdot (8 - x),$$

odkud $x > \frac{5}{3}$, neboli $x \in \{2; 3; \ldots\}$.

A dále je zřejmé, že

$$5 - 2x \geq 0,$$

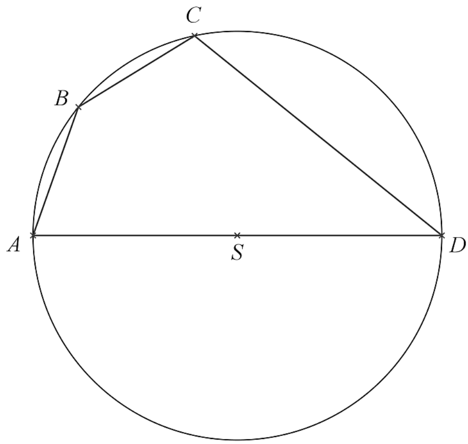
a proto $x \leq \frac{5}{2}$, neboli $x \in \{0; 1; 2\}$.

Z čehož vyplývá jediná možnost, že všemi třemi jazyky mluví dva hosté.

MAL108

Problem

In a planetary system of a star MAL108 there is an interesting situation, at the moment planets are placed as in the picture below. Your task is to calculate the distance between planets AD, if you know these distances $|AB| = 3$ mals, $|BC| = 3$ mals, $|CD| = 7$ mals.



Pict. 4

Solution

Solution 1

The quadrilateral $ABCD$ is chordal and furthermore it has two sides of the same length. It follows from the Inscribed Angle Theorem that angles subtended by arcs AB a BC are identical. Define

$$|\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle BAC| = \alpha.$$

Furthermore, side AD is a diameter of the circle k and therefore $|\sphericalangle ABD| = |\sphericalangle ACD| = 90°$. Since the triangle ABC is isosceles, it is easy to calculate that angle DBC measures $90° - 2\alpha$.

Applying the Law of sines to the triangle BCD, we obtain

$$\frac{7}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = \frac{3}{\sin\alpha}.$$

Hence after rearranging we have a goniometric equation

$$7\sin\alpha = 3\sin(90^\circ - 2\alpha).$$

Using basic goniometric properties we get a quadratic equation for $\sin\alpha$

$$7\sin\alpha = 3\cos 2\alpha,$$

$$7\sin\alpha = 3(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha),$$

$$6\sin^2\alpha + 7\sin\alpha - 3 = 0.$$

The last quadratic equation has in the range of sine function the only solution $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. From the right-angled triangle ADB, with its angle at the vertex D measuring α we see that diameter d of the circle k must follow the equation

$$\sin\alpha = \frac{3}{d} = \frac{1}{3},$$

and therefore the distance $d = |AD|$ is 9 mals.

Solution 2

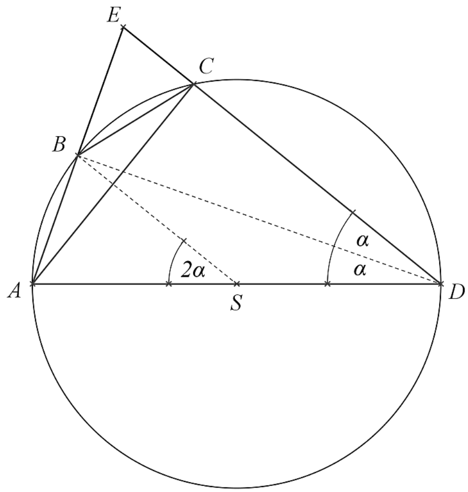
We define point E as an interception point of rays AB and DC and we see three new triangles: a right-angled triangle ACE, an isosceles triangle ADE and an isosceles triangle BCE. Since DE has the length of d, the size of CE equals $d - 7$. Further $|AE| = 6$, because $|BE| = |AB|$ (see pict. 5).

Applying the Pythagorean Theorem to the triangle ACE we obtain

$$|AC|^2 = |AE|^2 - |EC|^2,$$

$$d^2 - 7^2 = 6^2 - (d-7)^2,$$

and after simplifying $d^2 - 7d - 18 = 0$. In the range of positive numbers this equation has the only solution which satisfies conditions for the solution $d = 9$.



Pict. 5

Solution 3

Take notice that the angle ASB is the central angle corresponding to arc AB. Therefore, its size is 2α and hence BS is parallel to ED. The isosceles triangle CBE has at the main vertex angle 2α and thus it is similar to the triangle ASB. The similarity implies that

$$\frac{|AS|}{|AB|} = \frac{|BC|}{|EC|} \quad \text{or} \quad \frac{r}{3} = \frac{3}{d-7}$$

and since $d = 2r$, we get

$$r(2r-7) = 9.$$

Hence $2r^2 - 7r - 9 = 0$. This equation has the only positive solution $r = 4,5$ and so $d = 9$ mals.

Zkoušky na Akademii Hvězdné flotily

Zadání

Při zkouškách na Akademii Hvězdné flotily museli studenti vyřešit podle svého výběru jednu ze dvou následujících úloh. Podaří se vám to také?

1. *Obdélníkový list papíru přelož podél úhlopříčky a nepřekrývající se části odstřihni. Po rozevření získáš kosočtverec. Kosočtverec přelož podél střední příčky a nepřekrývající se části opět odstřihni. Jaký musí být poměr stran původního obdélníka, aby výsledný útvar byl pravidelný šestiúhelník?*

2. *Teodor přišel na to, že kubická rovnice*

$$x^3 - px^2 + qx - 5290 = 0$$

má zajímavou vlastnost. Má pouze dva kořeny a tyto kořeny se rovnají dni a měsíci Teodorových narozenin. Přišel také na to, že stejnou vlastnost má i rovnice

$$x^3 - rx^2 + sx - 2300 = 0.$$

Teodor chce, abyste si započítali, a proto vám čísla p, q, r, s zatajil. Zjistěte, kdy má Teodor narozeniny.

Řešení

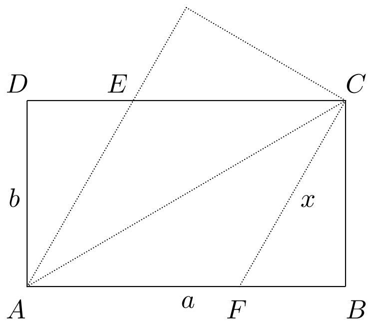
Úloha 1

Strany obdélníka (obr. 6) označme postupně $|AB| = a$, $|AD| = b$, stranu kosočtverce $AFCE$ získaného po odstřižení přesahujících částí označme jako x. Zřejmě platí

$$x^2 = b^2 + (a - x)^2.$$

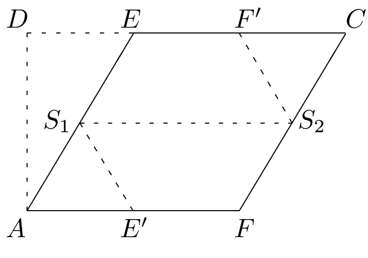
Úpravou tohoto vztahu dostaneme

$$x = \frac{a^2 + b^2}{2a}. \tag{1}$$



Obr. 6

V dalším kroku „překlápíme" kosočtverec $AFCE$ podél jeho střední příčky, tedy např. podle středů S_1, S_2 stran AE a FC (obr. 7). Po odstřižení přesahujících částí dostáváme osově souměrný šestiúhelník $E'FS_2F'ES_1$. Tento šestiúhelník bude pravidelný právě tehdy, když $|\sphericalangle S_1EF'| = 120°$, odkud $|\sphericalangle AED| = 60°$.



Obr. 7

Z trojúhelníku AED pak plyne $\dfrac{b}{x} = \sin 60°$, odkud po úpravě dostáváme

$$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}b. \tag{2}$$

Dohromady tak ze vztahů (1) a (2) získáváme $\dfrac{a^2+b^2}{2a} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}b$, neboli

$$\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Vzhledem k zadání úlohy (nalezení poměru stran) je pro nás vhodná úprava

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{4\sqrt{3}}{3},$$

neboť zavedením substituce $y = \frac{a}{b}$ a následnou úpravou dostáváme kvadratickou rovnici

$$y^2 - \frac{4\sqrt{3}}{3}y + 1 = 0.$$

Řešením této rovnice jsou čísla $y_1 = \sqrt{3}$, $y_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, tedy poměr stran původního obdélníka můžeme vyjádřit jako

$$a = \sqrt{3}b.$$

Úloha 2

Obě dvě rovnice mají stejné kořeny. Označme tyto kořeny α a β (v tuto chvíli nevíme, které z těchto čísel je den a které měsíc narozenin). Protože obě rovnice mají pouze dva kořeny, musí být nutně první ve tvaru

$$(x-\alpha)^2(x-\beta) = x^3 - (2\alpha+\beta)x^2 + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)x - \alpha^2\beta = 0 \tag{3}$$

a druhá ve tvaru

$$(x-\alpha)(x-\beta)^2 = x^3 - (\alpha+2\beta)x^2 + (2\alpha\beta + \beta^2)x - \alpha\beta^2 = 0. \tag{4}$$

Odtud dostaneme $\alpha^2\beta = 5290$ a $\alpha\beta^2 = 2300$. Dělením těchto výrazů dostaneme

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha^2\beta}{\alpha\beta^2} = \frac{5290}{2300} = \frac{23}{10}.$$

Protože $\alpha, \beta \in \{1, 2, \ldots, 31\}$, existuje jediná možnost $\alpha = 23, \beta = 10$. Z toho plyne, že Teodor má 23. 10. (tedy zítra) nejen svátek, ale také narozeniny.

Hodnoty p, q, r, s lze případně dopočítat ze vztahů (3) a (4):

$$\begin{aligned}
&p = 2\alpha + \beta = 56,\\
&q = \alpha^2 + 2\alpha\beta = 989,\\
&r = \alpha + 2\beta = 43,\\
&s = 2\alpha\beta + \beta^2 = 560.
\end{aligned}$$

Poznámky

Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, příspěvková organizace

Sborník příkladů ze soutěže Moravskoslezský matematický šampionát 2009

Ostrava 22. 10. 2009

Název	Moravskoslezský matematický šampionát 2009
Editor	RNDr. Eva Davidová
Vydavatel	Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, p. o. Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
Náklad	400 ks
Rozsah	24 stran
Vydání	první, 2009, revize 1
Tisk	Repronis Ostrava
Doporučená cena	zdarma

Texty neprošly jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-87058-10-7