Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
příspěvková organizace

Moravskoslezský matematický šampionát 2012

Sborník

Ostrava-Poruba
18. 10. 2012

ISBN 978-80-87058-17-6

Organizační výbor

Mgr. Bc. Libor Klubal	hlavní organizátor
RNDr. Eva Davidová	odborný matematický dohled, editor sborníku
Mgr. Lada Stachovcová	technická podpora

Autoři a recenzenti

RNDr. Eva Davidová, Mgr. Vladimír Dedek, Mgr. Lenka Dedková,

Mgr. Jana Gajdušková, Mgr. Petra Kňurová, Mgr. Tomáš Krchňák,

Mgr. Lenka Plášková, Mgr. Marie Štípalová, Mgr. Lada Stachovcová,

RNDr. Michal Vavroš, PhD.

Překlad do anglického jazyka

Mgr. Lada Stachovcová, Mgr. Jan Netolička

Obsah

Úvodní slovo

Napočítali jste někdy aspoň do desíti?

Přemýšleli jste někdy o čísle *deset*? Že vás nemůže nic překvapit? Já takovou jistotu nemám... Je to jako studovat vodu. Na Zemi zcela běžná chemická látka, a přesto by bez ní nebyl život. Atom kyslíku a dva atomy vodíku. Prý nuda. Vědcům však stojí za to, aby o ní napsali každý rok více než sto vědeckých prací. To *desítka* takové privilegium nemá, i když pro matematiky představuje taky „životadárnou kapalinu“[1].

Už Pythagoras, když zrovna nepřemýšlel o své větě, považoval desítku za magickou. Pokud jednička definuje bod, dvojka přímku (dva body přímku jednoznačně určují), trojka rovinu a čtyřka prostor, tak právě součet těchto čtyř prvních přirozených čísel dává deset.

Nebo lidské ruce. Uvědomili jste si, že používáme desítkovou soustavu jen proto, že máme deset prstů? Jak jednoduché bylo pro neandrtálce vysvětlit, že na palouku je deset muflonů. Jedenáct by pravděpodobně nezvládl[2].

I první čtyři faktoriály dávají v součtu deset: $0!+1!+2!+3! = 1+1+2+6 = 10$. Od desítky je dále odvozen jeden z nejpoužívanějších logaritmů. V binární soustavě jí odpovídá přepis 1010, v osmičkové jí pro změnu odpovídá „12“, v římském zápisu „X“, v čínském křížek „+“.

Anebo jinak: deset je protonové číslo neonu. Deset stabilních izotopů má ale cín, což je ze všech prvků nejvíce. Deset atomů vodíků má butan. Fyzikové označují deset jako „deka“. Informatici vědí, že kilobajt obsahuje 2^{10} bajtů a v operačním systému Mac OS X klávesa F10 uzavře všechny spuštěné programy. Kanada i Ghana mají deset provincií a Interstate 10 spojuje východní a západní pobřeží USA – Kalifornii a Floridu. Mezi Noahem a Abrahamem je v bibli deset generací. Židům se ztratilo hned deset kmenů. Katolická církev si vyžadovala „desátek“, tedy desetinu úrody. Pro sportovce je vrcholem všestrannosti desetiboj. Pro politiky adresa Downing Street 10.

A co víc – v roce 2012 máme desátý ročník Moravskoslezského matematického šampionátu. Na začátku byla jednoduchá myšlenka. Chtěli jsme jít hlavou proti zdi a ukázat, že matematika není sprosté slovo. Dnes už je ve

[1] Zde pozor: Myslím *desítku* jako číslo, nikoliv vychlazenou ve sklenici!

[2] Snad jsem se nedopustil předneolitické dějepisné sebevraždy. Ale desítková soustava skutečně souvisí s počtem prstů.

zdi velká díra. I letos vyhodnotíme celkem deset nejlepších řešitelů. Za celou dobu trvání soutěže změřilo své síly přes 3 000 mladých matematiků! Jsem si jist, že jich bylo 3 010.

A to není málo. Takže za těch deset let díky všem (nejen deseti) organizátorům – Libore, Evo, Michale, Lado, Jano, Lenko P., Tomáši, Lenko D., Vláďo D., Petro, Jitko, Jarko, Maruško, Dášo a všichni ostatní, že jste mi za ten nápad nedali hned deset holí. Ale asi jste toho vždy už 10 minut po zahájení přípravy na nový ročník litovali. Tak díky za to, že jste to nikdy nevzdali!

PaedDr. Antonín Balnar, PhD.

Kartičky s hokejisty

Zadání

Čtyři kamarádi mají sbírku kartiček s hokejisty. Každý z nich má o 34 kartiček více, než je pětina kartiček, které mají ostatní chlapci dohromady.

Kolik kartiček s hokejisty má každý z nich?

Řešení

Je zřejmé, že všichni chlapci musí mít stejný počet kartiček. Označme proto x počet kartiček s hokejisty u každého z chlapců. Ostatní kamarádi mají pak $3x$ kartiček, takže platí vztah

$$x = \frac{1}{5} \cdot 3x + 34,$$

odkud vypočteme

$$x = \frac{3x}{5} + 34 \Rightarrow \frac{5x - 3x}{5} = 34 \Rightarrow \frac{2x}{5} = 34 \Rightarrow x = 85.$$

Řešením rovnice dostáváme $x = 85$.

Každý z chlapců měl tedy 85 kartiček s hokejisty.

Míčky a míče

Zadání

Radek a Michal dostali za úkol uklidit míče ve skladu sportovního klubu. Práce jim moc nešla, zato ze zjištěných hmotností míčů sestavili zajímavou úlohu:

– Ragbyový míč a tenisák váží tolik jako míč pro volejbal.
– Ragbyový míč váží tolik, jako dva baseballové míčky a tenisák.
– Dva volejbalové míče váží tolik, jako šest baseballových míčků.

Kolik tenisáků váží míč pro ragby?

Řešení

Pro přehlednost označme míčky pro jednotlivé sporty počátečními písmeny jejich názvů:

t – tenisový míček
b – baseballový míček
v – volejbalový míč
r – ragbyový míč

Pak můžeme zadání přepsat takto:

$$\begin{aligned} r+t &= v \\ r &= 2b+t \\ 2v &= 6b \end{aligned}$$

První rovnici vynásobíme dvěma a druhou třemi. Dostaneme tak soustavu

$$\begin{aligned} 2r+2t &= 2v \\ 3r &= 6b+3t \\ 2v &= 6b \end{aligned}$$

Ze třetí rovnice dosadíme do druhé za výraz $6b$ výraz $2v$, čímž obdržíme druhou rovnici ve tvaru

$$3r = 2v + 3t,$$

odkud $3r - 3t = 2v$, což dosadíme do první rovnice, tj.

$$2r + 2t = 3r - 3t.$$

Po úpravě je $r = 5t$.

Ragbyový míč váží stejně jako pět tenisáků.

Mýdlo

Zadání

Družstvo házenkářek odjelo na dvoutýdenní soustředění. Maruška si s sebou vzala mýdlo ve tvaru kvádru a užívala jej rovnoměrně každý den. Za týden spotřebovala tolik mýdla, že se každý jeho rozměr zmenšil na polovinu. Na kolik dní jí ještě mýdlo vystačí, bude-li jej používat stejně jako dosud?

Řešení

Označme x, y, z rozměry mýdla. Po týdnu používání mělo mýdlo rozměry $\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}$. Původní objem mýdla (objem kvádru) je xyz, objem zůstatku mýdla po sedmi dnech používání je $\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2} \cdot \frac{z}{2} = \frac{xyz}{8}$.

Spotřebováno za 7 dní bylo

$$xyz - \frac{xyz}{8} = \frac{7}{8}xyz,$$

z čehož je vidět, že denní spotřeba mýdla je $\frac{1}{8}xyz$.

Mýdlo Marušce zůstane pouze na jeden den.

Věk Jana Železného

Zadání

Věk oštěpaře Jana Železného, držitele tří zlatých olympijských medailí v hodu oštěpem, se rovnal v roce 1988 součtu číslic roku jeho narození. Kolik měl v roce 1988 let?

Řešení

Věk oštěpaře Železného se rovná součtu číslic čtyřciferného čísla. Každá z těchto číslic je menší nebo rovna 9, tzn. oštěpař neměl více roků než 36 let $(9 + 9 + 9 + 9 = 36)$.

Z dané úvahy vyplývá, že se narodil ve 20. století, neboť $1988 - 36 = 1952$.

Rok narození tedy zapíšeme ve tvaru $19xy$, tj. $1000 + 900 + 10x + y$, kde x, y jsou čísla $0, 1, \ldots, 9$.

Dále víme, že součet číslic roku narození $1+9+x+y$ se rovná věku oštěpaře. Dostáváme tak rovnici

$$1 + 9 + x + y = 1988 - (1000 + 900 + 10x + y),$$

kterou dále řešíme:

$$\begin{aligned} 1 + 9 + x + y &= 88 - 10x - y \\ 11x + 2y &= 78 \\ x &= \tfrac{78-2y}{11} \end{aligned}$$

Čitatel musí být číslo kladné a dělitelné 11. Za y volíme postupně čísla $0, 1, \ldots, 9$. Vyhovuje jen $y = 6$. Po dosazení je $x = 6$.

Jan Železný se tedy narodil v roce 1966, to znamená, že v roce 1988 měl $1 + 9 + 6 + 6 = 22$ let.

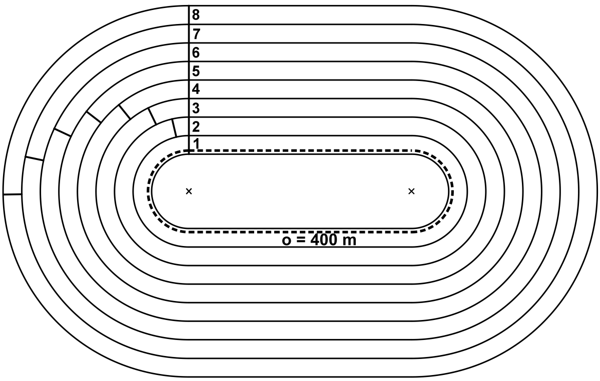
Osmá dráha

Zadání

Určete délku oblouku, o kterou se musí v běhu na 400 m posunout startovní bloky závodníka startujícího v osmé dráze tak, aby běžel přesně 400 m.

Parametry stadionu:

- Délka cílové rovinky je 85 m, cíl je na konci cílové rovinky v místě, kde začíná zatáčka.
- Každá zatáčka je tvořena půlkružnicemi.
- Šířka čar mezi jednotlivými drahami je 50 mm a šířka každé běžecké dráhy je 1,22 m.
- Délka každé dráhy se měří 15 cm od okraje té čáry vymezující běžeckou dráhu, která je blíže středu stadionu.
- První dráha měří přesně 400 m.



Řešení

Nejprve spočítáme poloměr zatáčky běžce v první dráze. Víme, že délka první dráhy je přesně 400 m, pokud odečteme od této délky dvakrát délku rovinky, dostaneme 230 m, což je obvod obou zatáček. Obě zatáčky dohromady tvoří kružnici, jejíž délka je $o = 2\pi r_1 = 230$, odkud pro poloměr zatáčky v první dráze plyne

$$r_1 = \frac{230}{2\pi} \doteq 36{,}606 \text{ m}.$$

Dále vypočítáme poloměr zatáčky v osmé dráze. Sečteme poloměr zatáčky první dráhy, zbytek první dráhy, sedmkrát šířku čáry, šestkrát šířku dráhy a 15 cm k měřenému místu v osmé dráze:

$$r_8 = r_1 + (1{,}22 - 0{,}15) + 7 \cdot 0{,}05 + 6 \cdot 1{,}22 + 0{,}15 \doteq 45{,}496 \text{ m}.$$

Pro obvod zatáček v osmé dráze platí $o_{z8} = 2\pi r_8$, po dosazení

$$o_{z8} \doteq 285{,}86 \text{ m}.$$

Nakonec dopočítáme délku osmé dráhy:

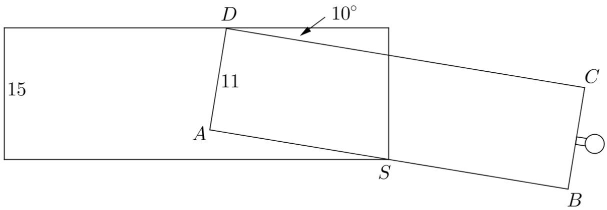
$$o_8 = o_{z8} + 2 \cdot 85 \doteq 455{,}86 \text{ m}.$$

Z toho plyne, že startovní bloky v osmé dráze musí být posunuty o $455{,}86 - 400 = 55{,}86$ m.

Zásuvka se startovací pistolí

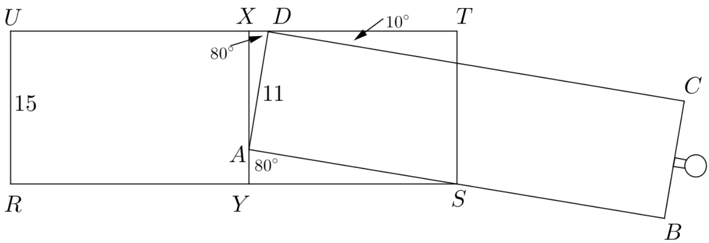
Zadání

Nervózní startér vytáhl šuplík se startovací pistolí ze zásuvky tak prudce, že se šuplík sklopil o $10°$ a narazil do horní stěny zásuvky (viz obrázek). Jaká je délka AB šuplíku, jestliže výška šuplíku je 11 cm, výška zásuvky 15 cm a šuplík se sklopil přesně v polovině své délky (bod S)?



Řešení

Označme obdélník, který představuje zásuvku, vrcholy R, S, T, U. Vedeme-li bodem A kolmici k RS, protíná tato kolmice úsečku TU v bodě X a úsečku RS v bodě Y (obrázek).



Vzhledem k tomu, že $|\measuredangle ADC| = 90°$, pak zřejmě $|\measuredangle ADX| = 80°$. Z pravoúhlého trojúhelníku ADX tedy můžeme vypočítat

$$|AX| = 11 \sin 80°.$$

Délku úsečky AY pak určíme jako

$$|AY| = |XY| - |AX| = 15 - 11 \sin 80°.$$

V pravoúhlém trojúhelníku YAS je opět $|\sphericalangle YAS| = 80^\circ$, a proto

$$|AS| = \frac{|AY|}{\cos 80^\circ} = \frac{15 - 11\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ}.$$

Délka šuplíku je dvojnásobkem $|AS|$, tedy

$$|AB| = \frac{30 - 22\sin 80^\circ}{\cos 80^\circ} \doteq 48 \text{ cm}.$$

The Vitamin Bags

Problem

After the end of an international basketball tournament of secondary school teams there were three kinds of fruit bags prepared for the participants. Small bags contained 1 orange and 2 bananas, medium bags contained 4 oranges and 3 bananas and large bags contained 8 oranges and 7 bananas. However, the participants were interested only in the large bags, so the organizers decided to unwrap the smaller ones and to distribute just the big ones.

In what proportions can the small and medium bags be combine to make large ones, without any fruit left?

Solution

Let a denotes the number of the prepared small bags, b denotes the number of the prepared medium bags and c denotes the number of the large bags that should consist of the fruit from the smaller bags.

For the number of oranges the following equation

$$a + 4b = 8c. \tag{1}$$

must hold. Similarly, for the number of bananas we get

$$2a + 3b = 7c. \tag{2}$$

We have to find positive integer solution of the system of the equations above. We will focus on expressing the relation between a and b, i. e. on eliminating the unknown c. The operation $7 \cdot (1) - 8 \cdot (2)$ yields

$$7(a + 4b) - 8(2a + 3b) = 0,$$

so $9a = 4b$. The smallest positive integer solution is $a = 4, b = 9$, then, for example from (1), we obtain $c = 5$.

The organizers should use 4 small bags and 9 medium bags to make 5 large ones, without any fruit left.

Závod v in-line bruslení

Zadání

Klára, Lenka a Marie se účastní vytrvalostního závodu v in-line bruslení. Trasu vytyčili organizátoři na rovném uzavřeném úseku dvouproudé silnice mezi městy A a B. Závodníci startují najednou z místa A, po otočce v B se vracejí zpět, dojedou do A, opět zamíří k B atd.

Klára je nejrychlejší, dosahuje na této trati průměrné rychlosti $24\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, Lenka jede nejpomaleji – rychlostí $12\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$. Rychlost Marie je $16\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$.

V jednom okamžiku soutěže došlo k tomu, že Lenka a Marie vyrážely společně z místa A a Klára proti nim z místa B. Nejprve minula rychlejší Marii a po dvou minutách potkala i pomalejší Lenku.

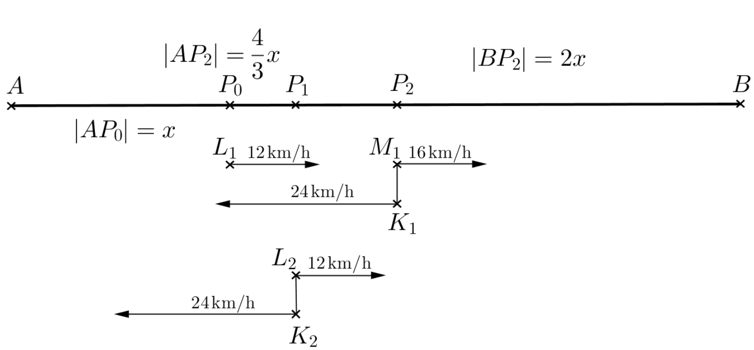
Určete vzdálenost mezi místy A a B.

Řešení

1. způsob

Na dráze si vyznačíme důležité body:
P_0 – místo, kde byla Lenka v čase, kdy se Klára potkala s Marií
P_1 – místo, kde se Klára potkala s Lenkou
P_2 – místo, kde se Klára potkala s Marií

Označme dráhu, kterou do setkání Kláry s Marií urazila Lenka, jako x, tj. $|AP_0| = x$. Klára jede oproti Lence dvojnásobnou rychlostí, urazila tedy do tohoto okamžiku dráhu $|BP_2| = 2x$. Dráha, kterou do té doby urazila Marie, je $|AP_2| = \frac{4}{3}x$, protože poměr rychlostí Marie a Lenky je $16 : 12 = 4 : 3$.

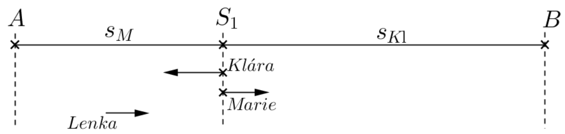


Klára urazila dráhu P_2P_1 rychlostí $24\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ za dvě minuty. Proto je $|P_2P_1| = 800$ m. Za stejnou dobu urazila nejpomalejší Lenka dráhu P_0P_1 rychlostí $12\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, je tedy $|P_0P_1| = 400$ m. V součtu je $|P_0P_2| = 1\,200$ m $=$ 1,2 km, což podle grafu odpovídá dráze $\frac{1}{3}x$. Odtud $x = 3{,}6$ km.

Pro vzdálenost AB platí $|AB| = \frac{4}{3}x + 2x = \frac{10}{3}x = 12$ km.

2. způsob

Uvažme zvlášť případy, kdy se Klára míjí s Marií (bod S_1 – viz schémata níže), a o dvě minuty později s Lenkou (bod S_2).



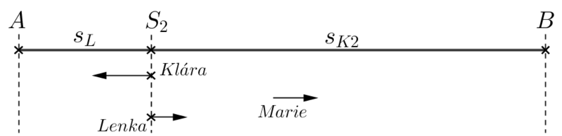
Označíme-li písmenem t čas, který uběhl od okamžiku, kdy dívky vyrazily proti sobě, do chvíle, kdy se míjely Marie s Klárou, a dále s_M (resp. s_{K1}) dráhu, kterou urazila Marie (resp. Klára) během doby t, pak zřejmě platí

$$|AB| = s_M + s_{K1},$$

odkud, vzhledem k rychlostem dívek,

$$|AB| = 16t + 24t = 40t\,. \tag{1}$$

O 2 minuty (neboli $\frac{1}{30}$ h) později, tedy v čase $t + \frac{1}{30}$, míjela Klára pomalejší Lenku (bod S_2).



Označíme-li nyní dráhu Lenky s_L a dráhu Kláry s_{K2}, platí obdobně

$$|AB| = s_L + s_{K2},$$

neboli

$$|AB| = 12\left(t + \frac{1}{30}\right) + 24\left(t + \frac{1}{30}\right) = 36t + \frac{6}{5}\,. \tag{2}$$

Porovnáním (1) a (2) dostáváme

$$40t = 36t + \frac{6}{5}\,,$$

tedy $t = \frac{3}{10}$ h. Nyní již můžeme snadno vypočítat

$$|AB| = 40t = 40 \cdot \frac{3}{10} = 12.$$

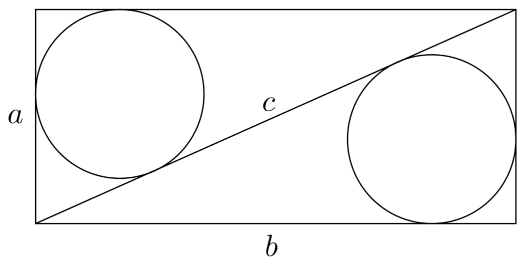
Vzdálenost mezi místy AB je 12 km.

Řecko-římský zápas

Zadání

Ve sportovní hale byla vytyčena dvě kruhová zápasiště pro boje v řecko-římském zápase takto:

Obdélník o rozměrech $a = 10\,\mathrm{m}$, $b = 24\,\mathrm{m}$ je úhlopříčkou c rozdělen na dva pravoúhlé trojúhelníky a každému z nich je vepsána kružnice, která je hranicí zápasiště (viz obrázek). Vypočtěte průměr těchto zápasišť a určete vzdálenost jejich středů.



Řešení

Poloměr ρ kružnice vepsané trojúhelníku figuruje ve vzorci pro obsah S trojúhelníku se stranami a, b, c

$$S = \rho \cdot s,$$

kde $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ je takzvaný půlobvod. Obsah pravoúhlého trojúhelníku ovšem dokážeme spočítat i ze vztahu $\dfrac{a \cdot b}{2}$. Z rovnosti obsahů tak můžeme spočítat ρ

$$\frac{a \cdot b}{2} = 120 = \rho \cdot s,$$

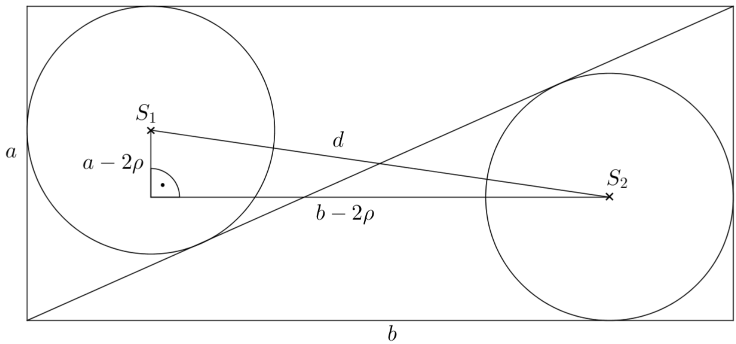
odkud $\rho = \dfrac{120}{s}$.

Potřebujeme ještě vypočítat délku uhlopříčky c:

$$c = \sqrt{10^2 + 24^2} = 26, \text{ tedy } s = \frac{10+24+26}{2} = 30.$$

Odtud již $\rho = \dfrac{S}{s} = \dfrac{120}{30} = 4$ m, a tedy průměr zápasiště je 8 m.
Označme dále S_1, S_2 středy jednotlivých zápasišť a d jejich vzdálenost.
Podle následujícího nákresu dopočítáme

$$d = \sqrt{(a-2\rho)^2 + (b-2\rho)^2} = \sqrt{2^2 + 16^2} = \sqrt{260} = 2\sqrt{65} \text{ m}.$$



Vzdálenost středů zápasišť je tedy $2\sqrt{65}$ m, což je přibližně 16,1 m.

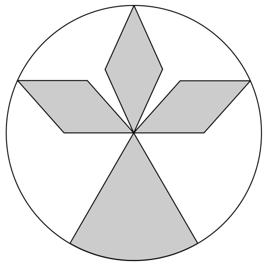
Medaile pro vítěze v orientačním běhu

Zadání

Medaile pro vítěze orientačního běhu je ozdobena třemi zlacenými lístky ve tvaru kosočtverců a postříbřenou dolní částí ve tvaru kruhové výseče.

V závodě zvítězil nadějný matematik Marek, kterého zajímalo, jaké množství zlata bylo zapotřebí k pozlacení tří kosočtvercových lístků.

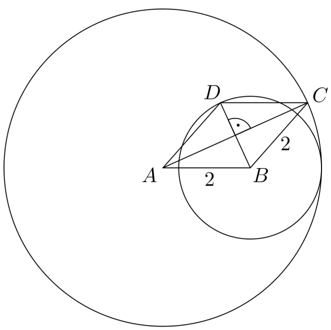
Od autora návrhu medaile zjistil, že každý z kosočtverců má následující zajímavé vlastnosti: Jeden vrchol každého z kosočtverců leží ve středu medaile, vrchol protilehlý na jejím obvodu. Zbylé dva vrcholy mají tu vlastnost, že sestrojíme-li kružnici se středem v jednom z nich, která prochází jemu protilehlým vrcholem, bude mít tato kružnice vnitřní dotyk s obvodovou kružnicí medaile. Délka strany kosočtverce je přitom 2 cm.



Kolik takovýchto medailí by bylo možno uvedeným způsobem pozlatit jediným gramem zlata, víte-li, že toto množství vystačí na pozlacení plochy 1 m^2.

Řešení

Zaměříme se na plochu jednoho lístku, tedy na obsah kosočtverce $ABCD$ (viz obrázek). Označme poloměr medaile R a poloměr menší kružnice r.



Vzhledem k tomu, že pro úhlopříčky kosočtverce $ABCD$ platí $|AC| = R$ a $|BD| = r$, můžeme obsah kosočtverce určit jako $S = \dfrac{R \cdot r}{2}$.

Z pravoúhlého trojúhelníka tvořeného polovinami úhlopříček kosočtverce můžeme odvodit vztah

$$\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = 4, \text{ neboli}$$

$$R^2 + r^2 = 16. \tag{1}$$

Protože kružnice mají vnitřní dotyk a bod dotyku leží na přímce AB, platí

$$R - r = 2. \tag{2}$$

Umocněním rovnice (2) dostáváme

$$(R - r)^2 = 4,$$

odkud $R^2 - 2Rr + r^2 = 4$. Po dosazení z (1) pak $16 - 2Rr = 4$, neboli $Rr = 6$.

Pro obsah kosočtverce $ABCD$ tedy platí $S = \dfrac{R \cdot r}{2} = \dfrac{6}{2} = 3\ \mathrm{cm}^2$.

Pozlacená plocha jedné medaile je tedy $9\ \mathrm{cm}^2$. Jeden gram zlata by vystačil na pozlacení $\dfrac{10\,000}{9} \doteq 1\,111$ ks medailí .

Poznámky

Poznámky

Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, příspěvková organizace

Sborník příkladů ze soutěže Moravskoslezský matematický šampionát 2012

Ostrava 18. 10. 2012

Název	Moravskoslezský matematický šampionát 2012
Editor	RNDr. Eva Davidová
Vydavatel	Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, p. o. Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
Náklad	400 ks
Rozsah	28 stran
Vydání	první, 2012, revize 1
Tisk	Repronis Ostrava
Doporučená cena	zdarma

Texty neprošly jazykovou úpravou.

ISBN 978-80-87058-17-6