Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
příspěvková organizace

Moravskoslezský matematický šampionát 2017

Sborník

Ostrava-Poruba
25. 10. 2017

Organizační výbor

PaedDr. Antonín Balnar, Ph.D.	hlavní organizátor
Mgr. Jana Gajdušková	odborný matematický dohled
Mgr. Lada Stachovcová	technická podpora

Autoři a recenzenti

RNDr. Eva Davidová, Mgr. Jana Gajdušková, Mgr. Petra Kňurová,

Mgr. Tomáš Krchňák, Mgr. Lenka Plášková, Mgr. Marie Štípalová,

RNDr. Michal Vavroš, Ph.D.

Překlad do anglického jazyka

Mgr. Jan Netolička, Mgr. Lada Stachovcová

Obsah

Je matematika skutečně živou vědou?

Určitě nikdo nepochybuje o tom, že matematika je vědou, a to dokonce vědou obtížnou a pro většinu populace vědou téměř nepochopitelnou. Jako každá jiná vědecká disciplína by se však i matematika měla neustále rozvíjet, objevovat nové poznatky, budovat nové teorie a prověřovat jejich pravdivost. Tak tomu je u všech přírodních disciplín, které se oprávněně nazývají vědou, ať je to chemie, fyzika nebo biologie. Velká část populace, a předpokládám, že většina studentů gymnázia, dovede bez větších problémů jmenovat některý ze skutečně nových a významných poznatků těchto oborů, získaných v nedávné době, protože o těchto poznatcích se často v relativně krátké době po jejich objevení alespoň stručně dozvídají již ve škole.

Jak je tomu však v případě matematiky? Skutečně má i matematika nové poznatky a vědecké výsledky? Nebo je to jen jednou provždy daný systém pravidel, axiomů a postupů, který se neustále stejným způsobem předává generacím?

Odpověď na tyto otázky není tak přímočará jako v případě zmíněných přírodních věd. Na rozdíl od většiny přírodních věd je vývoj matematiky pro většinu populace (včetně většiny studentů gymnázií) velmi skrytý a neznámý. Tuto skutečnost si velmi dobře uvědomíme, když si všimneme, že 99,9 % obsahu výuky matematiky na základní a střední škole představují teorie a metody objevené před více než 100 lety, a velmi podobná je i situace při výuce matematiky na většině např. technických vysokých škol.

Kde je tedy vývoj matematiky a je vůbec nějaký?

Odpověď je jednoduchá – vývoj matematiky jako vědy je přístupný převážně speciálně školeným osobám, které s touto vědou nějak pracují. Na rozdíl od jiných přírodních věd se laická veřejnost o vývoji matematiky až na výjimky nedozvídá v podstatě nic. A je to ohromná škoda, protože rozvoj matematiky je naprosto fascinující. Šíři tohoto rozvoje objektivně dokládají statistická data týkající se publikování nových, odbornou veřejností prověřených vědeckých výsledků v matematice. Touto statistikou se zabývá např. *Americká matematická asociace*, která již více než 70 let vydává časopis *Mathematical Reviews*, v němž jsou měsíčně uváděny abstrakty naprosté většiny vědeckých článků přinášejících nové matematické poznatky a teorie, uveřejněných v matematických časopisech z celého světy. Je naprosto fascinující, že měsíčně se v tomto časopise prezentuje cca 1 800 (!) nových článků, přinášejících nové a někdy převratné teorie a poznatky z matematiky, o nichž však laická veřejnost naprosto nic neví.

O fascinujícím rozvoji matematiky svědčí mj. i současné spektrum matematických oborů. Podle světově uznávané klasifikace matematických oborů v současnosti existuje 63 (!) základních matematických oblastí, z nichž každá má v průměru cca 10 hlavních oborů a každý z oborů má dále cca 10 dílčích (ale velmi rozsáhlých) podoborů. A po pravdě řečeno, specialista na jeden z těchto podoborů jen velmi rámcově rozumí jinému podoboru.

Matematika je tedy opravdu velmi aktivní a rozvíjející se věda, naprosto nezbytná pro většinu přírodních a technických věd. Jejím jediným nedostatkem je, že neumí své fascinující výsledky lépe prezentovat celé veřejnosti. Velmi bych si proto přál, aby alespoň někteří z vás pomohli dále matematiku v budoucnu nejen rozvíjet, ale pokusit se i lépe „prodat“ veřejnosti její výsledky, kvalitu a prospěšnost.

Prof. RNDr. Jiří Močkoř, DrSc.
Ostravská univerzita

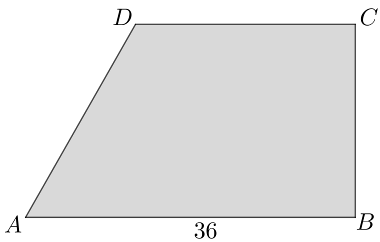
Úlohy pro zahradní architekty

Zadání

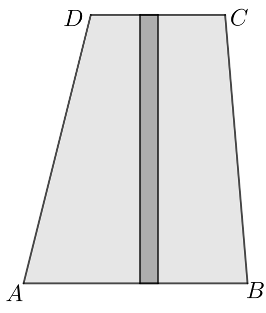
Pan Zahradník zakoupil pozemek, který tvoří obdélníková zatravněná zahrada s přilehlými hospodářskými budovami, pastvina a ovocný sad. Čeká jej spousta práce. Staré hospodářské budovy odstranit, zatravněnou plochu rozšířit, pastvinu oplotit a sadem vést nový dlážděný přístupový chodník. Neúplná dokumentace k pozemku jej přivedla k řešení následujících úloh:

a) Původní zahrada tvaru obdélníku měla rozměry 25 m a 40 m. Vybouráním přilehlých hospodářských budov se každý její rozměr zvětšil o pětinu. O kolik procent se zvětšila výměra zahrady?

b) Pastvina má tvar pravoúhlého lichoběžníku $ABCD$ s pravým úhlem u vrcholu B, přičemž $AB||CD$. Strana AB má délku 36 m. Délky stran AB a BC jsou v poměru 12 : 7. Délky stran AB a CD jsou v poměru 3 : 2. Pastvina bude oplocena elektrickým ohradníkem. Kabel pro tento ohradník se kupuje v celých násobcích 1 m. Vypočítejte, kolik metrů kabelu pro elektrický ohradník je třeba zakoupit.



c) Sadem tvaru lichoběžníku je třeba vést přístupový chodník kolmý na rovnoběžné strany. Předpokládaná šířka chodníku je 80 cm. Délky základen lichoběžníku jsou v poměru 5 : 3 a délka delší základny k délce chodníku je v poměru 5 : 6. Plocha celého sadu včetně plánovaného chodníku je 5 400 m^2. Pro objednávku dláždění chodníku je třeba vypočítat jeho výměru. Kolik metrů čtverečních chodníkové dlažby je třeba objednat?



Řešení

a)

Rozměry zvětšené zahrady jsou 30 m a 48 m. Plocha původní zahrady je $25 \cdot 40 = 1000\,\mathrm{m}^2$. Plocha zvětšené zahrady je $30 \cdot 48 = 1440\,\mathrm{m}^2$. Výměra nové zahrady tak tvoří $\frac{1440}{1000} \cdot 100 = 144\,\%$ výměry původní zahrady. Takže došlo ke zvýšení výměry o 44 %.

b)

Vypočteme nejprve délky stran lichoběžníkové pastviny.

Jelikož $|BC| : |AB| = 7 : 12$, je $|BC| = 21$ m. Obdobně $|CD| : |AB| = 2 : 3$, tedy $|CD| = 24$ m.

Délku AD vypočteme podle Pythagorovy věty:

$$|AD| = \sqrt{21^2 + (36 - 24)^2} \doteq 24{,}2\ \mathrm{m}.$$

Obvod zahrady měří přibližně $36 + 21 + 24 + 24{,}2 = 105{,}2$ m.

Pro elektrický ohradník je tedy třeba zakoupit 106 m kabelu.

c)

Označíme-li délku delší základny lichoběžníku $|AB| = a$, je $|CD| = \frac{3}{5}a$. Označme v délku chodníku. Tato proměnná současně označuje i výšku lichoběžníku. Podle zadání je poměr $a : v = 5 : 6$. Odtud $v = \frac{6a}{5}$.

Pro výměru sadu tvaru lichoběžníku pak platí

$$S = \frac{(|AB| + |CD|) \cdot v}{2} = \frac{(a + \frac{3}{5}a) \cdot \frac{6}{5}a}{2} = 5400.$$

Po úpravě dostáváme $\frac{24}{25}a^2 = 5400$, odkud $a = 75$ m. Tudíž $v = \frac{6}{5}a = 90$ m, což je délka plánovaného chodníku. Šířka chodníku má být podle zadání 0,8 m.

Na chodník tvaru obdélníku je tedy třeba objednat $90 \cdot 0{,}8 = 72\ \mathrm{m}^2$ dlažby.

Papíry

Zadání

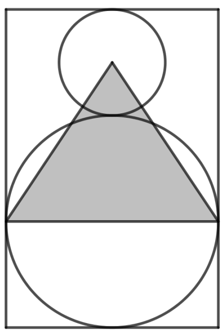
Žáci si v kroužku hráli s různě dlouhými a různě širokými proužky papíru.

a) Nejprve z jednoho proužku odstřihli desetinu jeho délky. Pak zbytek proužku rozstříhali na 8 stejných dílků. Oba druhy ústřižků se od sebe lišily o jeden centimetr. Jaká byla délka původního pruhu papíru?

b) Karel a Aneta se rozhodli, že roztřídí papírky podle barvy. Kdyby papírky třídili Karel s Anetou dohromady, měli by to hotové za hodinu. Kdyby Aneta třídila sama, trvalo by jí to hodinu a půl. Jak dlouho by třídil sám Karel?

c) Barevných papírků na roztřídění bylo 270. Červených bylo o tolik více než žlutých, o kolik bylo modrých více než červených, zelených více než modrých a fialových více než zelených. Červených a žlutých celkem bylo osmkrát méně než modrých, zelených a fialových dohromady. Kolik bylo modrých?

d) Martin si mezitím na jeden papír tvaru obdélníka s obsahem $30\,\mathrm{cm}^2$ nakreslil 2 kružnice – jednu větší, která se dotýkala tří stran papíru a jednu menší, která se dotýkala té větší a jedné strany papíru. Pak nakreslil trojúhelník, jeho vrcholy tvořily body dotyku větší kružnice s obdélníkem a střed menší kružnice (viz obrázek). Trojúhelník vybarvil oranžově. Jaký byl jeho obsah?



Řešení

a) Označme délku původního proužku papíru x. První odstřižený kousek pak má délku $\frac{1}{10}x$ a zbylý proužek $\frac{9}{10}x$. Délka každého z osmi stejných dílků je tedy $\frac{1}{8} \cdot \frac{9}{10}x$.

Dále víme, že oba druhy ústřižku se od sebe liší o jeden centimetr. Sestavíme rovnici

$$\frac{1}{8} \cdot \frac{9}{10}x - 1 = \frac{1}{10}x.$$

Vynásobíme-li obě strany rovnice 80, dostaneme $9x - 80 = 8x$. Po úpravě je $x = 80$.

Délka původního proužku papíru byla 80 cm.

b)

Karel roztřídí sám papírky za t hodin, Aneta sama za 1,5 hodin. Tzn., že za jednu hodinu roztřídí Karel $\frac{1}{t}$ proužků a Aneta $\frac{1}{1{,}5}$ všech proužků. Pracují-li společně jednu hodinu, roztřídí všechny, takže platí

$$1 \cdot \frac{1}{t} + 1 \cdot \frac{1}{1{,}5} = 1$$

Vynásobíme-li obě strany rovnice $1{,}5t$, dostaneme $1{,}5 + t = 1{,}5t$. Po dalších úpravách vypočítáme $t = 3$. Karel by sám roztřídil papírky za 3 hodiny.

c)

Pokud si počet žlutých papírků označíme x a rozdíl mezi počty červených a žlutých d, bude podle zadání počet červených $x + d$, modrých $x + 2d$, zelených $x + 3d$ a fialových $x + 4d$.

Z podmínek úlohy platí:

$$8(2x + d) = 3x + 9d$$

$$5x + 10d = 270$$

Z první rovnice vyjádříme $d = 13x$ a dosazením do druhé rovnice dostaneme $5x + 130x = 270$, odkud pak získáme $x = 2$, a tedy $d = 13 \cdot 2 = 26$.

Modrých papírků bylo $2 + 2 \cdot 26 = 54$.

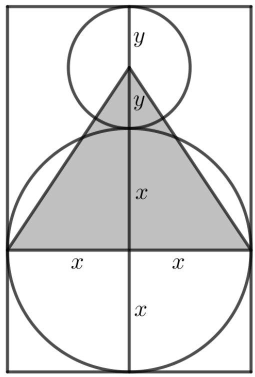
Jiné řešení

Označme jako x počet modrých papírků. Pak červených bude $x-d$, žlutých $x-2d$, zelených $x+d$ a fialových $x+2d$. Víme, že všech papírků dohromady je 270, tedy $x-d+x-2d+x+x+d+x+2d=270$, z čehož hned plyne, že $5x=270$, a počet modrých papírků je tedy $x=54$.

d)

Označme poloměr větší kružnice x a poloměr menší kružnice y (viz obrázek). Pak obsah celého obdélníku je

$$S_o = 2x \cdot (2x+2y) = 4x(x+y).$$



Obsah oranžového trojúhelníku je

$$S_t = \frac{2x \cdot (x+y)}{2} = x(x+y).$$

Porovnáním obou výrazů zjistíme, že obsah obdélníku je čtyřnásobek obsahu trojúhelníku. Ale protože obsah obdélníku známe, můžeme vypočítat obsah oranžového trojúhelníku.

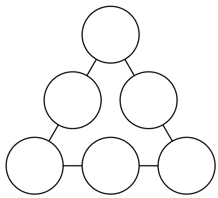
Odpověď je čtvrtina z třiceti, a to je 7,5 cm^2.

Číslo 15

Slavíme patnácté výročí našeho šampionátu!

Zadání

a) Do kroužků doplňte čísla 3 až 8 tak, aby součet čísel na každé straně trojúhelníku byl 15.



b) Jaký je ciferný součet čísla $10^{15} - 15$?

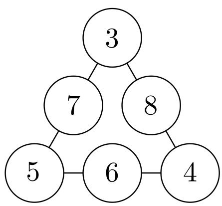
c) Myslíme si dvojciferné číslo. Odečteme-li od něj číslo napsané stejnými číslicemi, ale v opačném pořadí, pak třetina tohoto rozdílu je 15. Najděte všechna dvojciferná čísla, která toto splňují.

d) Sečteme-li největšího společného dělitele a nejmenší společný násobek dvou různých přirozených čísel, dostaneme výsledek 15. Které dvojice čísel to splňují?

Řešení

a)

Na stranách trojúhelníku jsou čísla 3, 7, 5; 5, 6, 4; 4, 8, 3, tedy například



b)

$$10^{15} - 15 = 1\,000\,000\,000\,000\,000 - 15 = 999\,999\,999\,999\,985$$

Ciferný součet je tedy $13 \cdot 9 + 8 + 5 = 130$.

c)

Dvojciferné číslo označme $\overline{XY}$. Pro řešení této úlohy můžeme s výhodou použít rozvinutý zápis čísla v desítkové soustavě $\overline{XY} = 10X + Y$.

Číslo zapsané stejnými číslicemi, ale v opačném pořadí, pak můžeme vyjádřit ve tvaru $\overline{YX} = 10Y + X$. Dále lze předpokládat, že $\overline{XY} > \overline{YX}$.

Rozdíl těchto čísel můžeme následně napsat takto:

$\overline{XY} - \overline{YX} = 10X + Y - 10Y - X = 9X - 9Y = 9(X - Y)$. Třetina tohoto rozdílu je pak rovna výrazu $3(X - Y)$.

Dále platí, že $3(X - Y) = 15$, tedy $X - Y = 5$. Z toho vyplývá, že rozdíl cifer hledaného čísla je 5.

Dostáváme tak následující možnosti: $(6, 1), (7, 2), (8, 3), (9, 4)$. Hledaná čísla jsou 61, 72, 83 a 94.

d)

Označme neznámá čísla a, b, jejich největší společný dělitel D a nejmenší společný násobek n. Daná čísla a, b s pomocí D a n lze vyjádřit takto:

$$a = a_1 \cdot D \qquad b = b_1 \cdot D \qquad n = D \cdot a_1 \cdot b_1.$$

Ze zadání víme, že $D + n = 15$. Dosadíme-li do tohoto vztahu, získáme rovnici

$$D + a_1 b_1 D = 15,$$

neboli

$$D\,(1 + a_1 b_1) = 15.$$

Protože číslo 15 můžeme rozložit na součin způsoby

$$15 = 1 \cdot 15 = 3 \cdot 5,$$

dostáváme pro hodnotu D několik možností, které prozkoumáme.

- Je-li $D = 1$, pak výraz $1 + a_1b_1 = 15$ a tedy $a_1b_1 = 14 = 1 \cdot 14 = 2 \cdot 7$. Pro $a_1 = 1, b_1 = 14$ jsou hledaná čísla $a = a_1D = 1$, $b = b_1D = 14$. Pro $a_1 = 2, b_1 = 7$ jsou hledaná čísla $a = a_1D = 2$, $b = b_1D = 7$.
- Je-li $D = 3$, pak výraz $1 + a_1b_1 = 5$ a tedy $a_1b_1 = 4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2$. Pro $a_1 = 1, b_1 = 4$ jsou hledaná čísla $a = a_1D = 3$, $b = b_1D = 12$. Pro $a_1 = 2, b_1 = 2$ jsou hledaná čísla $a = a_1D = 6$, $b = b_1D = 6$, což nevyhovuje.
- Je-li $D = 5$, pak výraz $1 + a_1b_1 = 3$ a tedy $a_1b_1 = 2 = 1 \cdot 2$. Pro $a_1 = 1, b_1 = 2$ jsou hledaná čísla $a = a_1D = 5$, $b = b_1D = 10$.
- Je-li $D = 15$, pak výraz $1 + a_1b_1 = 1$ a tedy $a_1b_1 = 0$. Tato možnost nevyhovuje zadání, 0 nepatří do množiny přirozených čísel.

Úloha má čtyři řešení: $(1, 14), (2, 7), (3, 12), (5, 10)$.

Číselný problém

Zadání

Nechť $\overline{abcde}$ je pěticiferné číslo s navzájem různými ciframi. Určete tyto cifry, platí-li

$$\overline{abcde} \cdot 4 = \overline{edcba}.$$

Řešení

Je zřejmé, že a je nejvýše 2. Pokud by a bylo větší než 2, pak by čtyřnásobek čísla $\overline{abcde}$ muselo být číslo šesticiferné. Dále a nemůže být 0 (číslo nemůže začínat 0). Zároveň a musí být sudé, protože číslo $\overline{edcba}$ musí být sudé (je čtyřnásobkem celého čísla). Tedy $a = 2$.

Součin $e \cdot 4$ musí končit číslicí 2, e tedy může být 3 nebo 8. Protože $a = 2$, musí být $\overline{edcba}$ nejméně 80 000, e je tedy nutně 8.

Platí, že b nemůže být větší než 2. Pokud by b bylo 3 a více, součin $\overline{2bcd8} \cdot 4$ bude větší než 90 000. Dále b nemůže být 2 ($a \neq b$). Pokud by b bylo 0, pak by číslo $\overline{d8} \cdot 4$ muselo končit dvojčíslím 02, což není možné (takové d neexistuje). Proto je nutně $b = 1$.

Musí tedy platit, že $\overline{d8} \cdot 4$ končí dvojčíslím 12. Jedinou možností je $d = 7$.

Musí platit, že $\overline{21c78} \cdot 4 = \overline{87c12}$. Z čehož plyne rovnice $84312 + 400 \cdot c = 87012 + 100 \cdot c$, jejímž řešením je $c = 9$.

Řešení je tedy jediné, a to

$$a = 2,\ b = 1,\ c = 9,\ d = 7,\ e = 8.$$

Dosazením do zadání lze ověřit, že skutečně $21978 \cdot 4 = 87912$.

Brouček

Zadání

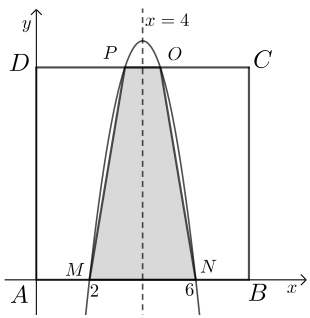
Brouček Matematicus se prochází v kartézské soustavě souřadnic Oxy v rovině po parabolách daných předpisem $y = a(x-2)(x-6)$, kde $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Na jedné z těchto parabol se mu podařilo čtyřikrát protnout hranici čtverce s vrcholy $A[0;0], B[8;0], C[8;8], D[0;8]$ tak, že obsah lichoběžníku s vrcholy v těchto průsečících byl 36. Vypočtěte hodnoty parametru a, při kterých tato situace mohla nastat.

Řešení

Daná parabola protíná osu x (a tedy zároveň i stranu AB čtverce $ABCD$) ve dvou bodech: $M[2;0]$ a $N[6;0]$. Velikost úsečky MN je 4. Hledáme další dva vrcholy lichoběžníku – průsečíky paraboly a hranice čtverce. Označme je O a P.

Řešení rozdělme na následující případy:

Je-li $a < 0$, musí ležet dva zbylé průsečíky O, P na straně CD (viz obrázek) a platí $|OP| < 4$.

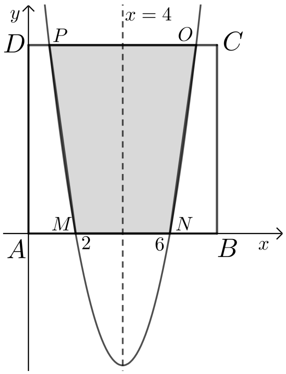


Pak ale pro obsah S lichoběžníku $MNOP$ platí

$$S = \frac{(|MN| + |OP|) \cdot 8}{2} = 4(4 + |OP|) = 16 + 4 \cdot |OP| < 32,$$

což je v rozporu se zadáním.

Pro $a > 0$ nastanou dva případy. Buď leží průsečíky O, P na straně CD, nebo jeden na straně AD a druhý na straně BC.



Pokud leží body O, P na straně CD, můžeme jejich vzdálenost vypočítat z daného obsahu lichoběžníku $MNOP$:

$$36 = \frac{(4 + |OP|) \cdot 8}{2}.$$

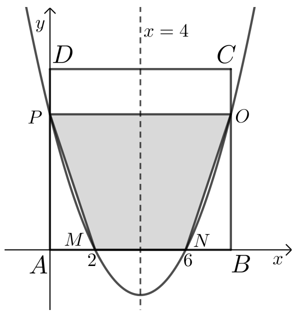
Odtud $|OP| = 5$, souřadnice bodů jsou pak

$$O[4 + \frac{5}{2}; 8], P[4 - \frac{5}{2}; 8],$$

tedy $O[\frac{13}{2}; 8], P[\frac{3}{2}; 8]$.

Po dosazení souřadnic bodů do rovnice paraboly dopočítáme hodnotu parametru $a = \frac{32}{9}$.

Leží-li body O, P na stranách AD a BC, pak velikost úsečky OP je 8.



Tentokrát z obsahu lichoběžníku dopočítáme jeho výšku:

$$36 = \frac{(4 + 8) \cdot v}{2}.$$

Po úpravě je $v = 6$, souřadnice bodů jsou tedy $O[8; 6], P[0; 6]$. Po dosazení do rovnice paraboly dopočítáme hodnotu $a = \frac{1}{2}$.

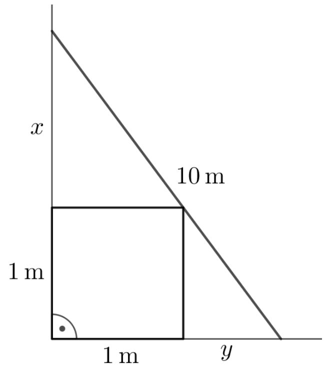
Úloha má tedy dvě řešení: $a_1 = \frac{32}{9},\ a_2 = \frac{1}{2}$.

A Ladder

Problem

A box in the shape of a cube with the edge length of 1 m stands tightly to a wall. A ladder of the length of 10 m leans against the wall and just touches the box at an edge. At which height does the ladder touch the wall?

Solution



It is obvious from the picture that:

$$(1+y)^2 + (1+x)^2 = 10^2$$

$$\frac{y}{1} = \frac{1}{x}$$

So we should solve the system of equations of two variables x, y. By substituting y from the second equation we get

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^2 + (1+x)^2 = 100$$

$$1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+1+2x+x^2 = 100$$

$$\left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(2x+\frac{2}{x}\right)-100 = 0$$

After other operations we obtain the equation

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-100=0.$$

Replacing the expression $\left(x+\frac{1}{x}\right)$ by the new variable z gives the quadratic equation

$$z^2+2z-100=0$$

whith the roots $-1-\sqrt{101}$ and $-1+\sqrt{101}$. Due to the fact that x, y determine the distances only the positive root is possible.

Then we can find x by solving the equation

$$x+\frac{1}{x}=-1+\sqrt{101}$$

or $x^2+\left(1-\sqrt{101}\right)x+1=0$. This yields roots $x_1 \doteq 8{,}94$ a $x_2 \doteq 0{,}11$.

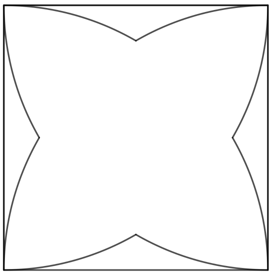
After adding 1 m (the cube edge length) to the variable x we get the height of the top of the ladder.

The ladder touches the wall at the approximate height of 9,94 m or 1,11 m.

Šablona na razítko

Zadání

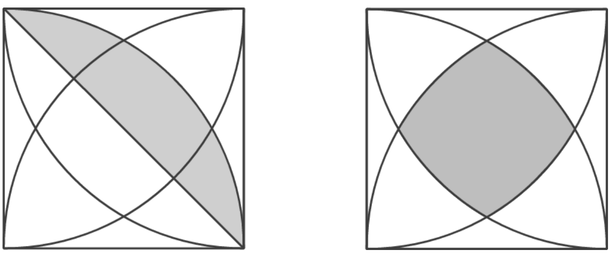
Ve firmě na výrobu razítek mají za úkol vyrobit razítko ve tvaru květiny (viz obrázek). Gumová šablona květiny je vsazena do čtvercové matrice o rozměru a, lístky květiny jsou tvořeny oblouky kružnic o stejném poloměru rovnému straně čtverce.



Vypočítejte plochu vlastního razítka tvaru květiny.

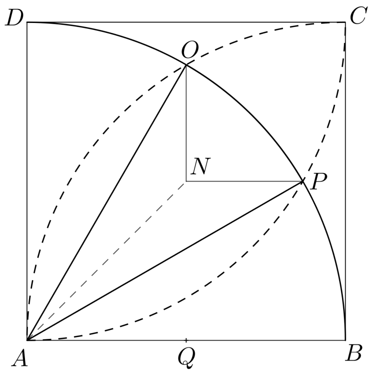
Řešení

Plocha květiny je složená ze čtyř shodných úsečí (viz obrázek), které se v centrální části překrývají. Obsah průniku těchto úsečí proto odečteme od obsahu všech čtyř úsečí.



Plocha jedné úseče má velikost $\dfrac{\pi a^2}{4} - \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a^2}{4}(\pi - 2)$, čtyři úseče mají tedy obsah $4 \cdot \dfrac{a^2}{4}(\pi - 2) = \pi a^2 - 2a^2$.

Dále si označme důležité body útvaru, viz následující obrázek.



Čtvrtinu překrývající se části získáme odečtením obsahů trojúhelníků ANO a ANP od obsahu výseče APO. Vzhledem k tomu, že trojúhelníky APD a ABO jsou rovnostranné, má středový úhel výseče PAO velikost $\frac{\pi}{6}$. Její obsah je roven $\frac{\pi a^2}{12}$.

Dále $S_{\Delta ANO} = \frac{1}{2} \cdot |NO| \cdot v_{NO} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{|AO|^2 - |AQ|^2} - |QN| \right) \cdot \frac{a}{2}$.

Po dosazení vztah částečně upravíme:

$$S_{\Delta ANO} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\sqrt{3} - \frac{a}{2} \right) \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8} \left(\sqrt{3} - 1 \right).$$

Současně $S_{\Delta ANO} = S_{\Delta APN}$. Pro obsah oblasti PNO získáme vztah

$$S_1 = \frac{\pi a^2}{12} - 2 \cdot S_{\Delta ANO} = \frac{\pi a^2}{12} - \frac{a^2}{4} \left(\sqrt{3} - 1 \right) = \frac{a^2}{4} \left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1 \right).$$

Závěrečným výpočtem obdržíme výsledný vztah:

$$S = \pi a^2 - 2a^2 - 4 \cdot \frac{a^2}{4} \left(\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + 1 \right) = \frac{2}{3}\pi a^2 + a^2\sqrt{3} - 3a^2.$$

Plocha razítka má velikost $\frac{2}{3}\pi a^2 + a^2\sqrt{3} - 3a^2$.

Graf binární relace

Zadání

Vyšetřete množinu bodů

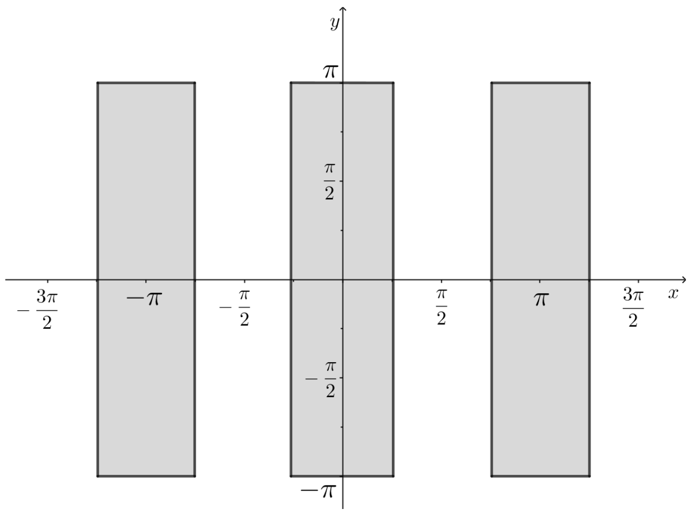
$$\mathcal{M} = \{[x; y]; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}; |\operatorname{tg}(x+y)| \leq 1 \wedge |\operatorname{tg} x| \leq 1 \wedge |y| \leq \pi\}.$$

V kartézské soustavě souřadnic Oxy sestrojte graf množiny $\mathcal{M}$ pro $x \in \left\langle -\frac{5}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi \right\rangle$.

Řešení

Z podmínky $|y| \leq \pi$ vyplývá, že oborem hodnot binární relace $\mathcal{M}$ bude interval $\langle -\pi; \pi \rangle$ nebo jeho část.

Rozeberme nyní podmínku $|\operatorname{tg} x| \leq 1$, neboli $-1 \leq \operatorname{tg} x \leq 1$. Tato situace se bude periodicky opakovat pro body $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{4} + k\pi \right\rangle$. Hodnota proměnné y přitom bude ležet v intervalu $\langle -\pi; \pi \rangle$. Omezíme-li se na předepsaný definiční obor, bude vyhovovat $k \in \{-1; 0; 1\}$. Graf relace splňující první a druhou podmínku je na následujícím obrázku:



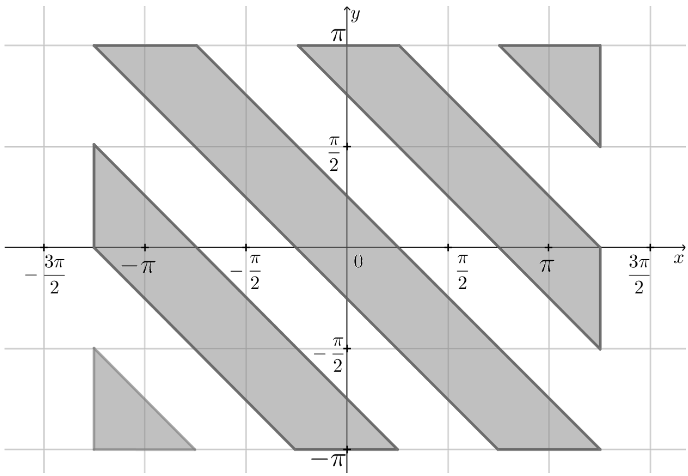
Nyní se budeme věnovat rozboru podmínky $|\operatorname{tg}(x+y)| \leq 1$. Můžeme ji přepsat do tvaru $-1 \leq \operatorname{tg}(x+y) \leq 1$. Pro argument $(x+y)$ odsud vyplývá, že pro každé $m \in \mathbb{Z}$ musí platit

$$-\frac{\pi}{4} + m\pi \leq (x+y) \leq \frac{\pi}{4} + m\pi.$$

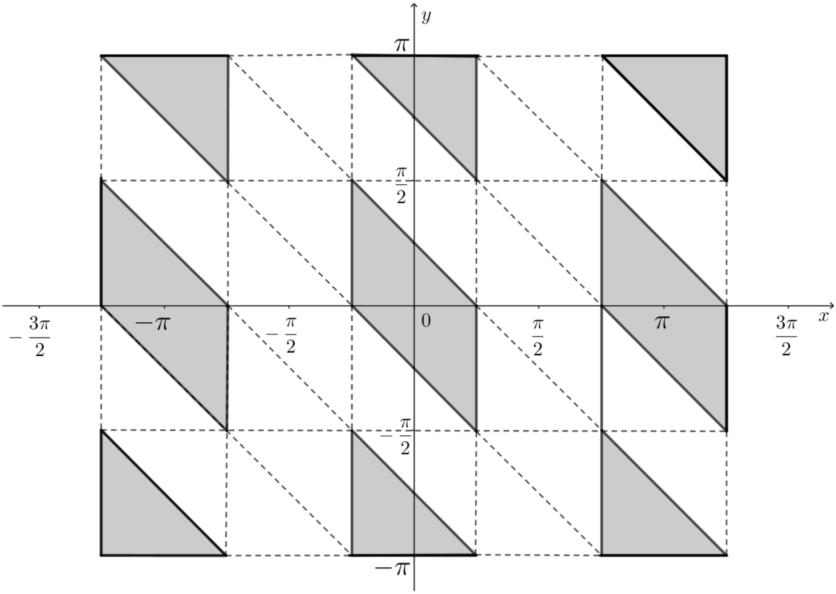
Po rozdělení na dvě nerovnice a vyjádření závislé proměnné y dostáváme

$$y \geq -x - \frac{\pi}{4} + m\pi \ \wedge \ y \leq -x + \frac{\pi}{4} + m\pi.$$

Aby body $[x; y]$ ležely v předepsané oblasti, musí být $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Graf pak tvoří rovinné pásy omezené grafy lineárních funkcí, přičemž $x \in \left\langle -\frac{5}{4}\pi; \frac{5}{4}\pi \right\rangle$ a $y \in \langle -\pi; \pi \rangle$.



Průnikem grafů splňujících všechny podmínky je pak tento výsledný graf:



Poznámky

Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, příspěvková organizace

Sborník příkladů ze soutěže Moravskoslezský matematický šampionát 2017

Ostrava 25. 10. 2017

Název	Moravskoslezský matematický šampionát 2017
Editor	Mgr. Jana Gajdušková
Vydavatel	Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, p. o. Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
Náklad	500 ks
Rozsah	28 stran
Vydání	první, 2017, revize 1
Tisk	Nord Service, spol. s r. o.
Doporučená cena	zdarma

Texty neprošly jazykovou úpravou.