Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669
Občanské sdružení Okna

Moravskoslezský matematický šampionát 2005

Sborník

Ostrava-Poruba
23. 9. 2005

ISBN 80-903647-0-5

Organizační výbor

RNDr. Eva Davidová	odborný matematický dohled, editor sborníku
Mgr. Bc. Libor Klubal	sborník, technická podpora
RNDr. Michal Vavroš	sborník, spolupráce s partnerskými školami

Mgr. Dáša Beerová, RNDr. Jitka Bukovanská, Mgr. Tomáš Krchňák,

Mgr. Dagmar Kubinová, Mgr. Jarmila Kučová, Mgr. Hana Pávková,

Mgr. Vladimír Pavlosek, Mgr. Lenka Plášková, Mgr. Zuzana Teichmannová

Moravskoslezský matematický šampionát se za dva roky stal vyhledávanou soutěží žáků základních i středních škol našeho regionu, což je zásluha týmu lidí, kteří odvádějí zcela profesionální práci. Děkuji!

Mgr. Antonín Balnar, organizátor soutěže

Obsah

Úvodní slovo

Mgr. Jaroslava Fischerová
Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
reditel@gym669ova.cz

Vážený čtenáři – účastníku matematického klání či příteli matematiky, moudrá slova přenechám povolanějším, přesto bych něco málo napsala o historii mláděte zvaného Moravskoslezský matematický šampionát. Letos v září probíhá teprve třetí pokus soustředit v jednom dni na jednom, tom nejstarším porubském, gymnáziu co nejvíc čerstvých matematických mozků. Rok od roku se hlásí víc šikovných matematiků. V minulých letech dorazili kromě tuzemských i zahraniční a byli mimochodem velmi úspěšní. Na ten letošní třetí šampionát se chystala široká zahraniční konkurence, složená z žáků našich partnerských škol z Polska a ze Slovenska. Zatímco přátelé z Polska, přesněji z gymnázií z Dwikoz a ze Sandomierze, už atmosféru naší soutěže dobře znají, pro účastníky ze slovenských gymnázií z Kysuckého Nového Mesta a z Námestova to bude úplně nová zkušenost.

I když letošní boje budou i proto tvrdší, neznamená to, že nebudou vítězové. Naopak. Vítězství bude o to cennější a opravdu zasloužené! Děkujeme sponzorům a partnerům, že se nezalekli matematiky a naopak se snaží soutěž všemi prostředky podpořit, za což jim patří náš dík. Závěrem si dovolím popřát celé soutěži všechno nejlepší, což znamená nejlepší organizaci, nejlepší účastníky – matematiky, nejlepší výsledky těch nejlepších a také co nejlepší zhodnocení celé akce veřejností.

Mgr. Jaroslava Fischerová, ředitelka školy

Cyklistický závod

Mgr. Jarmila Kučová
Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
kucova@gym669ova.cz

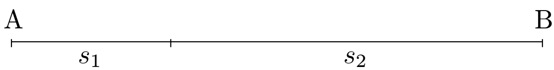
Motivace

Úlohy s fyzikální tématikou jsou nedílnou součástí matematiky. Pohyb těles nás provází na každém kroku. Jízda automobilem, cyklistika, let letadlem a samozřejmě i chůze patří neodmyslitelně k našemu životu. Snažíme se tento pohyb poznat a popsat pomocí zákonů fyziky. Přečtěte si nyní pečlivě zadání následujícího příkladu a pokuste se pochopit a správně vyřešit danou úlohu.

Zadání

Etapa cyklistického závodu vedla z města A do města B. Zpočátku jel peloton rychlostí 42 km·h^{-1}. Po 50 minutách museli závodníci trvale překonávat silný protivítr a jejich rychlost klesla o 4 km·h^{-1}. Do cíle dojel peloton o 20 minut později, než kdyby nesnižoval svou původní rychlost. Vypočítejte délku trasy z města A do města B.

Řešení



Označme následující:
počáteční rychlost pelotonu $v = 42$ km·h^{-1},
předpokládanou dobu jízdy rychlostí 42 km·h^{-1} jako t,
dobu jízdy proti větru $t_1 = 50$ min $= \frac{50}{60}$ h $= \frac{5}{6}$ h
a celkovou dráhu pišme jako $s = s_1 + s_2$.

Rychlost v úseku s protivětrem je $v' = v - 4$ km·h^{-1} $= 38$ km·h^{-1}.

Rovnice pro čas t' potřebný k uražení dráhy s_2 má tvar

$$t = \frac{50}{60} + t' - \frac{20}{60}$$
$$t = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} + t' = \frac{1}{2} + t'.$$

Dráhu s_1 prvního úseku vyjádříme takto: $s_1 = 42 \cdot \frac{50}{60}, s_1 = 35\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$.
Pro celkovou dráhu s platí

$$\begin{aligned}
s &= s_1 + s_2 \\
42t &= s_1 + 38t' \\
42\left(\frac{1}{2} + t'\right) &= 35 + 38t' \\
42t' + 21 &= 35 + 38t' \\
4t' &= 14 \\
t' &= 3,5\ \text{hod.}
\end{aligned}$$

Pak původně plánovaná doba jízdy

$$t = \frac{1}{2} + t' = 4\ \text{hod.}$$

Výpočet délky celé trasy

$$\begin{aligned}
s &= v \cdot t \\
s &= 42\ \mathrm{km{\cdot}h^{-1}} \cdot 4\ \text{hod} \\
s &= 168\ \text{km}
\end{aligned}$$

Ověření času:
celková doba jízdy pelotonu

$$t_1 + t' = \frac{5}{6} + 3\frac{1}{2} = \frac{5}{6} + \frac{7}{2} = \frac{5+21}{6} = \frac{26}{6} = 4\frac{1}{3}\ \text{hod},$$

zpoždění

$$4\frac{1}{3} - 4 = \frac{1}{3}\ \text{hod} = 20\ \text{min.}$$

Závěr

Trasa etapy z města A do města B byla dlouhá 168 km.

Recenze

RNDr. Jitka Bukovanská, Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba

Běžecký závod

Mgr. Dagmar Kubinová
Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
kubinova@gym669ova.cz

Zadání

Závodu v běhu na 100 m se účastní 625 závodníků. Závodní dráha má 5 běžeckých tratí. Z každého rozběhu postupuje do další soutěže vítěz, ostatní jsou vyřazeni. Jaký minimální počet rozběhů je nutný k určení vítěze závodu?

Řešení

Závodníky rozdělíme po 5 do 125 rozběhů. Z nich zůstane 125 vítězů. Znovu dělíme na 5 drah, vznikne 25 vítězů, potom 5 a to je poslední rozběh. Odtud $125 + 25 + 5 + 1 = 156$.

Závěr

Minimální počet rozběhů nutný k určení vítěze závodu je 156.

Recenze

Mgr. Hana Pávková, Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba

Dělitelnost čísel

Mgr. Bc. Libor Klubal
Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
klubal@gym669ova.cz

Zadání

Kolik přirozených čísel vyhovuje zároveň všem těmto třem podmínkám:

- jsou pěticiferná;
- mají poslední číslici 6;
- jsou dělitelná třemi.

Řešení

Každé pěticiferné číslo s poslední číslicí 6 lze zapsat ve tvaru $d_4d_3d_2d_16$. Aby bylo číslo dělitelné třemi, musí být třemi dělitelný i jeho ciferný součet. Číslice 6 na konci čísla dělitelnost třemi neovlivní. Pomocí číslic d_1, d_2 a d_3 lze vytvořit celkem 1000 různých čísel. Ciferný součet těchto čísel může nabývat hodnot 0 až 28. Pokud budeme čísla 0 až 28 dělit číslem 3, dostáváme zbytky 0, 1 a 2. Vhodnou volbou číslice d_4 tedy zajistíme, že celé číslo $d_4d_3d_2d_16$ bude dělitelné třemi.

Volbu číslice d_4 provedeme takto:
je-li zbytek dělení 0, pak d_4 musí být 3, 6 nebo 9
je-li zbytek dělení 1, pak d_4 musí být 2, 5 nebo 8
je-li zbytek dělení 2, pak d_4 musí být 1, 4 nebo 7

Pro každou z možných variant prostředních číslic máme tedy tři možnosti volby číslice d_4. Celkový počet hledaných čísel je tedy 3000.

Závěr

Všechny podmínky zadání splňuje 3000 přirozených čísel.

Recenze

RNDr. Michal Vavroš, Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba

Nádrže

Mgr. Lenka Plášková
Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
plaskova@gym669ova.cz

Zadání

Martin dostal za domácí úkol úlohu o nádržce a čtyřech kohoutech, ale marně se ji snažil rozřešit.

Úloha zněla: Prvním a druhým kohoutem nateče dohromady za hodinu p hektolitrů vody. Druhým a třetím nateče za hodinu o 30 hl více. Třetím a čtvrtým nateče za hodinu dvakrát více než druhým a třetím dohromady. Prvním a čtvrtým kohoutem nateče za hodinu o 20 hl vody více než prvním a druhým. Kolik hl nateče za hodinu každým kohoutem zvlášť?

Proč Martin nenašel řešení úlohy?

Řešení

Označme x, y, z, t počet hektolitrů, který nateče za hodinu po řadě prvním, druhým, třetím a čtvrtým kohoutem.

Dostáváme tak soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x + y &= p \\ y + z &= p + 30 \\ z + t &= 2(p + 30) \\ x + t &= p + 20 \end{aligned}$$

Z prvních dvou rovnic vyloučíme y odečtením, tj. $x - z = -30$.

Rovnice $z + t = 2(p + 30)$ a $x - z = -30$ sečteme a máme tak

$$x + t = 2p + 30.$$

Čísla x, t musí splňovat jak rovnice $x + t = 2p + 30$, tak rovnici $x + t = p + 20$. To je však možné jen tehdy, když

$$2p + 30 = p + 20.$$

Odkud plyne

$$p = -10,$$

což je v rozporu s významem čísla p (p nemůže být záporné číslo).

Závěr

Martin nenašel řešení úlohy, protože úloha řešení nemá.

Recenze

RNDr. Eva Davidová, Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba

Výška majáku

RNDr. Eva Davidová
Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
davidova@gym669ova.cz

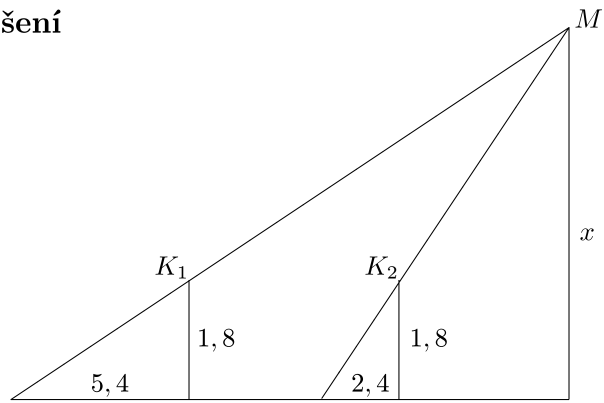
Motivace

Podobnost útvarů znají studenti z každodenní praxe. Uvedený příklad poskytuje mimo jiné zajímavý námět k užití podobnosti při určení výšky objektu nebo jeho vzdálenosti od pozorovatele.

Zadání

Námořník $1,8$ metrů vysoký jde po pláži přímo k majáku. Jeho stín způsobený světlem majáku je nejprve dlouhý 5,4 m. Když se námořník přiblíží k majáku o 90 m, zkrátí se stín o 3 m. Jak vysoký je maják a jak daleko od majáku byl původně námořník?

Řešení



Označme N_1 výchozí polohu námořníka, P patu majáku a M jeho vrchol. Úkolem je tedy určit délky úseček N_1P a PM. Označme S_1 hranici námořníkova stínu při prvním měření, N_2S_2 délku námořníkova stínu při druhém měření.

z obrázku jsou zřejmé dvě dvojice podobných trojúhelníků:

$$\triangle S_1PM \sim \triangle S_1N_1K_1, \quad \triangle S_2PM \sim \triangle S_2N_2K_2.$$

Dále označme vzdálenost $|N_2P| = y, |PM| = x$, a $|N_1N_2| = 90$ m.

Z poměrů odpovídajících si stran plynou následující vztahy:

$$\frac{1,8}{2,4} = \frac{x}{2,4+y} \qquad \frac{1,8}{5,4} = \frac{x}{95,4+y}.$$

Řešením této soustavy dostáváme:

$$y = 72 \text{ m}, \quad x = 55,8 \text{ m}$$

a vzdálenost od majáku

$$|N_1P| = y + 90 = 162 \text{ m}.$$

Závěr

Výška majáku je tedy 55,8 m a původní vzdálenost námořníka od majáku je 162 m.

Recenze

Mgr. Lenka Plášková, Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba

Solving General Triangle

RNDr. Eva Davidová
Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
davidova@gym669ova.cz

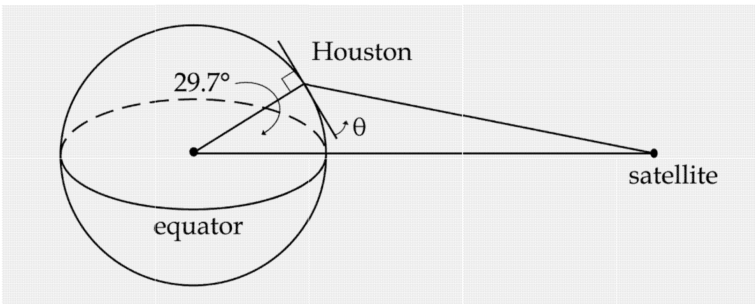
Motivation

To solve a triangle means to find missing measurements. These cases can be solved by using the law of sines or the law of cosines.

Problem

1. A communication satellite is in orbit 35 800 km above the equator. It completes one orbit every 24 hours, so that from Earth it appears to be stationary above a point on the equator. If this point has the same longitude as Houston, find the measure Θ, the satellite's angle of elevation from Houston. The latitude of Houston is $29,7°$N; take the radius of Earth to be 6 400 km.

2. What is the greatest latitude from which a signal can travel to the satellite in a straight line?



Solution

Add 1) The distance between the centre C of the Earth and the satellite S is $|CS| = 6\ 400$ km $+ 35\ 800$ km $= 42\ 200$ km. We can get the measure $\varphi = \sphericalangle CHS$ by using the law of sines. But at first it is necessary to find the

distance $|HS| = y$ by using the law of cosines.
Step 1:

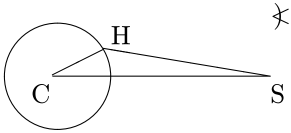
$$y^2 = 42200^2 + 6400^2 - 2 \cdot 42200 \cdot 6400 \cdot \cos 29,7^\circ \Rightarrow y = 36777,7 \text{ km}.$$

Step 2:

$$\sin \varphi = \frac{42200 \cdot \sin 29,7^\circ}{y} = 0,5685.$$

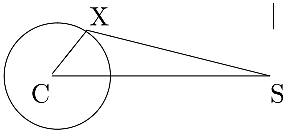
There are two solutions: $\varphi_1 = 34^\circ 39'$ and $\varphi_2 = 145^\circ 21'$. So we have to count with the obtuse angle φ_2. Now, the satellites angle of elevation is $\Theta = \varphi - 90^\circ = 55^\circ 21'$.

Add 1)



$\sphericalangle CHS = \varphi$; $|\sphericalangle HCS| = 29,7^\circ$

Add 2)



$|\sphericalangle CXS| = 90^\circ$; $\sphericalangle CXS = \psi$.

Add 2) If we are supposed to look for the greatest possible latitude, we have to use the tangent from the point S to the surface of the Earth: from the triangle CSX,

$$\cos \psi = \frac{6400}{42200} \Rightarrow \psi = 81^\circ 17'.$$

Recenze

Mgr. Lenka Plášková, Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
Mgr. Šárka Kolková, Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba

Závod motocyklů

RNDr. Jitka Bukovanská
Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
bukovanska@gym669ova.cz

Motivace

V celkovém objemu vědomostí, které lidstvo v procesu historického vývoje dodnes nahromadilo, patří výjimečné místo fyzice. Rok 2005 je také proto mezinárodním rokem fyziky. Fyzika vysvětluje změny a jevy v přírodě, kolem nás, formuluje mimo jiné zákony pohybu. Pro správné řešení fyzikálních úloh s takovou tematikou žák nevystačí jen s mechanickými znalostmi fyzikálních vztahů, ale potřebuje velmi dobrý matematický základ. Při úspěšném řešení se prokáže jeho matematické mistrovství a dovednost.

Zadání

Na závodech starovali tři motocyklisté. Druhý jel průměrnou rychlostí o 15 km·h^{-1} menší než první závodník a o 3 km·h^{-1} větší než třetí závodník, k cíli dorazil o 12 minut později než první a o 3 minuty dříve než třetí závodník.

Vypočítejte:

- délku závodní dráhy;
- rychlost každého závodníka;
- jak dlouho jel každý závodník.

Počítejte v jednotkách km·h^{-1}.

Řešení

Označme následující:

rychlost druhého jezdce v_2, rychlost prvního jezdce $v_1 = v_2 + 15$, rychlost třetího jezdce $v_3 = v_2 - 3$ a délku závodní dráhy s.

Označme dobu jízdy prvního závodníka t_1, druhého závodníka t_2 a třetího závodníka t_3 a zapišme tyto jako:

$$B = \begin{cases} t_1 \\ t_2 = t_1 + \frac{1}{5} \\ t_3 = t_2 + \frac{1}{20} \end{cases}$$

Doby jízdy závodníků ze závislosti dráhy na čase lze zapsat jako:

$$A = \begin{cases} t_1 = \frac{s}{v_2+15} \\ t_2 = \frac{s}{v_2} \\ t_3 = \frac{s}{v_2-3} \end{cases}$$

Dosadíme A do B:

$$\begin{aligned} \frac{s}{v_2} &= \frac{s}{v_2+15} + \frac{1}{5} \\ \frac{s}{v_2-3} &= \frac{s}{v_2} + \frac{1}{20} \end{aligned}$$

Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} 5s(v_2+15) &= 5sv_2 + v_2(v_2+15) \qquad (2) \\ 20v_2s &= 20s(v_2-3) + v_2(v_2-3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5sv_2 + 75s &= 5sv_2 + v_2^2 + 15v_2 \\ 20sv_2 &= 20sv_2 - 60s + v_2^2 - 3v_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 75s &= v_2^2 + 15v_2 \\ 60s &= v_2^2 - 3v_2 \end{aligned}$$

Odečtením obou rovnic získáme $15s = 18v_2 \Rightarrow 5s = 6v_2 \quad (1)$.
Dosadíme (1) do (2):

$$\begin{aligned} 6v_2(v_2+15) &= 6v_2^2 + v_2(v_2+15) \\ v_2^2 - 75v_2 &= 0 \Longrightarrow v_2(v_2-75) = 0 \end{aligned}$$

Jeden kořen $v = 0$ fyzikálně nevyhovuje; v_2 =75 km·h^{-1}. Z (1) platí: $s = \frac{6}{5}v_2 \Rightarrow s = 90$ km.

Závěr

Závodní dráha měla délku 90 km. Rychlosti jednotlivých závodníků jsou 90 km$\cdot$h^{-1}, 75 km$\cdot$h^{-1} a 72 km$\cdot$h^{-1}. Jejich časy byly 1 h, 1 h 12 min a 1 h 15 min.

Recenze

Mgr. Jarmila Kučová, Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba

Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice

Mgr. Tomáš Krchňák
Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
krchnak@gym669ova.cz

Motivace

Tyto vztahy, kterým se také říká Viètovy vzorce podle francouzského matematika Francois Vièta, který žil v letech 1540–1603, umožňují relativně snadné řešení i úloh na první pohled náročných. Při řešení této úlohy budete dále potřebovat základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi.

Zadání

Je dána kvadratická rovnice s neznámou $x \in R$

$$\frac{x^2}{\sin\varphi} - x \operatorname{cotg}\varphi + \cos\varphi \operatorname{cotg}\varphi - \sin\varphi = 0$$

Tato rovnice má kořeny r, s. Vyjádřete výraz $\frac{rs}{r^2+s^2+rs}$ pomocí goniometrických funkcí úhlu φ.

Řešení

Vynásobíme rovnici výrazem $\sin\varphi$, $\varphi \neq k\pi$ a po úpravách dostaneme rovnici ve tvaru:

$$x^2 - x\cos\varphi + \cos 2\varphi = 0$$

Podle Viètových vzorců platí:

$$rs = \frac{c}{a} = \cos 2\varphi$$
$$r + s = \frac{-b}{a} = \cos\varphi$$

Dále potřebujeme vyjádřit výraz

$$r^2 + s^2 + rs = (r+s)^2 - rs = \cos^2\varphi - \cos 2\varphi$$

Závěr

$$\frac{rs}{r^2+s^2+rs} = \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi - \cos 2\varphi} = \operatorname{cotg}^2\varphi - 1, \varphi \neq k\pi,\ k \in Z.$$

Recenze

Mgr. Zuzana Teichmannová, Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba

Solving Right Triangle

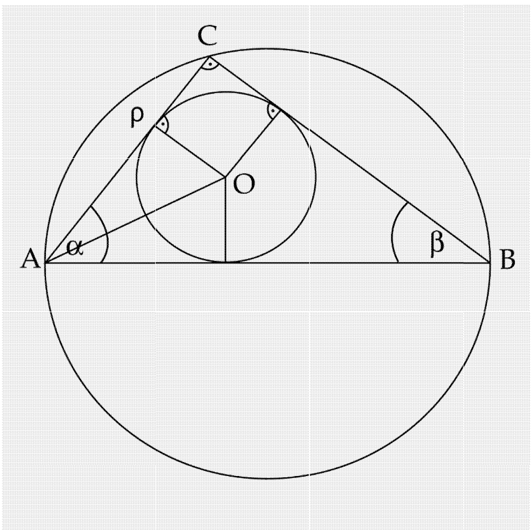
Mgr. Iwona Marzec
Publiczne gimnazjum, ul. Spoldzielzca 12, 27-620 Dwikozy, Polsko
lukem@poczta.onet.pl

RNDr. Eva Davidová
Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
davidova@gym669ova.cz

Problem

In a right triangle, one acute angle is twice the size of the other. What is the area of the circumscribed circle of the triangle if the circumference of the circle inscribed in the triangle is 2π?

Solution



The figure shows a right triangle with the right angle at C. The given circumference of the inscribed circle m can be used for the calculation of their radius ϱ:

$$o = 2\pi\varrho = 2\pi \Rightarrow \varrho = 1.$$

If we know that $\alpha = 2\beta$, the real size of the angles must be: $\alpha = 30°$, $\beta = 30°$. In this kind of triangle the lenght of $|AC|$ is half the lenght of $|AB|$, $|AC| = \frac{1}{2}|AB| = r$, where r is the radius of the circumscribed circle.
Consequently, $(|AC| = |AP| + |PC|$ and $|PC| = \varrho) \Rightarrow |AC| = |AP| + 1$.
The line AC is the tangent to the inscribed circle at P.
The lenght of $|AP|$ can be calculated from the triangle APO. If the point O is on the bisector of the angle BAC, then

$$|AP| = \frac{\varrho}{\operatorname{tg} 30°} \Rightarrow |AP| = \sqrt{3} \text{ and } |AC| = \sqrt{3} + 1 = r.$$

Therefore

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\sqrt{3} + 1\right)^2 = \pi \left(4 + 2\sqrt{3}\right).$$

Conclusion

The area of the circumscribed circle is supposed to be:

$$S = \pi \left(4 + 2\sqrt{3}\right).$$

Recenze

Mgr. Lenka Plášková, Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
Mgr. Šárka Kolková, Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba

Dělitelnost čísel

Mgr. Bc. Libor Klubal
Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
klubal@gym669ova.cz

Zadání

Zapišme všechna dvojciferná čísla od 19 do 80 do jedné řady. Vznikne číslo $N = 1920\ \ldots\ 7980$. Je číslo N dělitelné číslem 1980?

Řešení

Má-li být číslo N dělitelné číslem 1980, pak musí být dělitelné všemi členy jeho prvočíselného rozkladu

$$1980 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11.$$

Naším úkolem je tedy ověřit dělitelnost čísly 4, 5, 9 a 11.

Dělitelnost čísly 4 a 5 je zřejmá.

Číslo N je dělitelné číslem 9, je-li dělitelný 9 i jeho ciferný součet. Ciferný součet čísla N vypočteme tak, že sečteme číslice na sudých a lichých pozicích. Součet číslic na lichých místech lze zapsat

$$1 + (2 + 2 + \cdots + 2) + (3 + 3 + \cdots + 3) + \cdots + (7 + 7 + \cdots + 7) + 8 =$$
$$= 9 + 10 \cdot (2 + 3 + \cdots + 7) = 279$$

Součet číslic na sudých místech lze zapsat

$$9 + (0 + 1 + 2 + \cdots + 9) + \cdots + (0 + 1 + 2 + \cdots + 9) + 0 =$$
$$= 9 + 6 \cdot 45 = 279$$

Ciferný součet čísla N $= 2 \cdot 279 = 558$ a je dělitelný 9, tedy i číslo N je dělitelné 9.

Má-li být číslo N dělitelné 11, musí být rozdíl ciferného součtu číslic na sudých a lichých místech roven nule. Tato podmínka je splněna, což vyplývá z předchozího ověření dělitelnosti číslem 9. Číslo N je tedy dělitelné 11.

Recenze

Mgr. Vladimír Pavlosek, Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba

Hledá se dvojice čísel

RNDr. Eva Davidová
Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
davidova@gym669ova.cz

Motivace

Předložený problém předpokládá znalost problematiky dělitelnosti v oboru celých čísel a následně řešení diofantovské kvadratické rovnice.

Zadání

Dvě celá čísla sečteme, odečteme, znásobíme a vydělíme. Sečteme-li všechny výsledky, dostaneme číslo 243. Která jsou ona dvě výchozí čísla? Najděte všechna řešení.

Řešení

Označme hledaná čísla $a, b \quad (a, b \in Z, a \neq 0, b \neq 0)$ a předpokládejme, že $a > b$. Protože součtem součtu, rozdílu, součinu a podílu čísel musí být celé číslo 243, musí být číslo a nenulovým násobkem čísla b.

Označme tedy $a = k \cdot b \quad (k \in Z, k \neq 0)$.

Musí tedy platit:

$$a + b + a - b + ab + \frac{a}{b} = 243.$$

Po dosazení:

$$kb + b + kb - b + kb \cdot b + \frac{kb}{b} = 243.$$

Po úpravě dostáváme: $k \cdot (b^2 + 2b + 1) = 243$, tedy $k \cdot (b + 1)^2 = 243$.

Číslo $(b+1)^2$ může nabývat pouze hodnot 1, 9 nebo 81, protože $243 = 1 \cdot 3^5$ a uvedená čísla jsou takovými druhými mocninami přirozených čísel, která lze z rozkladu čísla 243 sestavit.

Je tedy $|b + 1| = 1, |b + 1| = 3$ nebo $|b + 1| = 9$.

První případ dává jen $b = -2$, druhý $b = 2$ nebo $b = -4$, třetí $b = 8$ nebo $b = -10$.

Prvému případu odpovídá $k = 243$, druhému $k = 27$, třetímu $k = 3$. Číslo a dopočteme ze vztahu $a = kb$.

Závěr

Řešením jsou tedy dvojice čísel
$[-486; -2]$, $[54; 2]$, $[-108; -4]$, $[24; 8]$, $[-30; -10]$.

Recenze

Mgr. Lenka Plášková, Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba

Poznámky

Poznámky

Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669

Sborník příkladů ze soutěže Moravskoslezský matematický šampionát 2005

Ostrava 23. 9. 2005

Název	Moravskoslezský matematický šampionát 2005
Editor	RNDr. Eva Davidová
Vydavatel	Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669
Náklad	250 ks
Rozsah	36 stran
Vydání	první, 2005
Tisk	Gymnázium, Ostrava-Poruba, Čs. exilu 669 Repronis Ostrava
Doporučená cena	zdarma

Texty neprošly jazykovou úpravou.

ISBN 80-903647-0-5