Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
příspěvková organizace

Občanské sdružení Okna

Moravskoslezský matematický šampionát 2006

Sborník

Ostrava-Poruba
15. 11. 2006

ISBN 80-87058-03-8

Organizační výbor

Mgr. Antonín Balnar, PhD.	hlavní organizátor
RNDr. Eva Davidová	odborný matematický dohled, editor sborníku
Mgr. Bc. Libor Klubal	sborník, technická podpora
Mgr. Lada Stachovcová	sborník, technická podpora
RNDr. Michal Vavroš, Ph.D.	sborník, spolupráce s partnerskými školami

RNDr. Jitka Bukovanská, Mgr. Jana Gajdušková

Mgr. Jaroslava Fischerová, Mgr. Šárka Kolková, Mgr. Tomáš Krchňák

Mgr. Jarmila Kučová, Mgr. Iwona Marzec, Mgr. Wanda Samek

Obsah

Úvodní slovo

Mgr. Jaroslava Fischerová

Milí mladí vědátoři,

„Pěstovat vědu je nesmírně vzrušující a zábavné. Člověk se cítí nesmírně svobodný.“ To řekl pan prof. Wichterle, pod jehož jménem od 1. září letošního roku vystupuje naše gymnázium a k jehož odkazu se hlásíme. Čestným názvem vzdáváme hold profesoru Wichterlemu jako příkladu skvělého vědce a gentlemana. Bez lidí jako on by dnes Česká republika nebyla svobodnou zemí a neměla by tak skvělou reputaci ve vědě a výzkumu ve světě.

Otto Wichterle byl i velkým občanem naší země. Celý život bránil zdravý lidský rozum, slušnost a toleranci proti zneužívání moci totalitními režimy, za což se mu fašistické Německo odměnilo vězením, komunistický režim pak neustálým šikanováním. Narodil se v roce 1913 v Prostějově, kde dokončil i svá gymnaziální studia. Pro svá vysokoškolská studia si šťastnou náhodou vybral chemii na ČVUT. A chemie se stala jeho celoživotní cestou a láskou. Díky zajímavému oboru, který ho zcela pohltil, dnes máme například vysokomolekulární látku polykaprolaktan, zvanou silon a výrobky z něho vyráběné a užíváme již běžně měkké kontaktní čočky zhotovené z hydrofilních gelů, jejichž objev přinesl Wichterlemu světové uznání a proslulost. To jsou jen dvě ukázky z velkého díla proslulého vědce, který se může chlubit i 150 patenty.

Využijme nenásilné pobídky světoznámého vědce a začněme pěstovat vědu, třeba tu matematickou, již dnes a ověřme si své schopnosti i platnost myšlenky akademika Wichterleho. Ten své myšlenky nejen vyslovil, ale především je celý život realizoval. A k tomu se váže i další citát: „Mít nápad, to není nic zvláštního, ale ten nápad realizovat, to vyžaduje úsilí.“

A to už je nyní na Vás, jak usilovně se dáte do pěstování matematiky a ostatních vědeckých disciplín. Na úsilí také záleží, není vše jen otázka talentu, který Vám určitě nechybí. Proto s talentem, který Vám byl dán, vyviňte maximální úsilí. A já Vám k tomu přeji velký kus štěstí, které se vždycky hodí a je také k získání úspěchu potřebné.

Mgr. Jaroslava Fischerová

Úvodní slovo

Prof. RNDr. Helena Illnerová, CSc.

Každý z nás se raduje, když něco dokáže, na něco přijde, něco objeví. Raduje se, když zdolá úskalí matematické úlohy, když nad ní zvítězí, když mu vyjde smysluplný výsledek. Američané mají pro takovou výzvu na něco přijít, s něčím se poprat, něčemu čelit s otevřeným hledím všeobjímající slovo „challenge". Lidé, kteří výzvu přijmou a dají se do hledání a do boje, budou již vždy mít chuť objevovat si věci sami, být samostatní v myšlení, být tvůrčí, nenechat se ovlivňovat různými demagogiemi a politickými slogany. A jen skutečně samostatně myslící jedinci mohou být oporou společnosti, mohou být dobrými občany.

Moravskoslezský matematický šampionát, který v roce 2006 již vchází do svého čtvrtého ročníku, umožňuje takový boj, kdy jedinci změří své síly se soupeři i sami se sebou. Navíc umožňuje toto změření sil v samotné královně věd – v matematice. Jistě není třeba konstatovat, že dobrá znalost a tvůrčí přístup k matematice je základem mnoha věd, oborů a odvětví jako např. fyziky, chemie, informatiky, strojírenství, stavební techniky, dnes již i biologie a mnoha dalších. Já sama jsem vystudovala chemii, první dva roky ještě na Matematicko-fyzikální fakultě Univerzity Karlovy, a pak jsem se již životně věnovala biochemii a biologii. Matematiku jsem stále potřebovala při stovkách a stovkách laboratorních výpočtů. A matematika pro mne též vždy výzvou byla. I když jsem byla na mateřských dovolených, brousila jsem si alespoň po nocích mozek na nejtěžších příkladech uvedených v anglické knížce „Check your own IQ" – Prověř si své vlastní IQ. A tak jsem to IQ prověřovala, i když jsem třebas na řešení některých úloh přišla až k ránu. Přijít na něco vždy vyžaduje určitou zaťatost.

A tu zaťatost bude jistě vyžadovat i absolvování Moravskoslezského matematického šampionátu. Bude vyžadovat vůli úlohy zvládnout. To se nemusí vždy podařit. I pro matematický šampionát jistě platí slova francouzského pedagoga a historika, zakladatele novodobých olympijských her barona Pierre Fredi de Coubertina: „Není důležité zvítězit, ale zúčastnit se". Již účast na šampionátu prokazuje bojový a tvůrčí duch. Nepodaří-li se vše rozluštiti nyní, tak snad příště. Nedostaví-li se úspěch v tomto směru, tak třebas v jiném. Důležité je nevzdávat se; bojovat, vyvíjet maximální snahu o porozumění věcí a jevů a jejich zvládnutí; a být stále zvídavý. A k podpoře těchto snah jistě poslouží i Moravskoslezský šampionát 2006.

Prof. RNDr. Helena Illnerová, CSc.

Úloha o terči

Mgr. Lada Stachovcová
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
stachovcova@gym669ova.cz

Zadání

Při střelbě na kruhový terč bylo možno zásahem střely získat následující počty bodů: zásah středu terče – 20 bodů; zásah vnitřního mezikruží – 12 bodů; zásah vnějšího mezikruží – 8 bodů. Při závodech střelec vždy trefil terč a nikdy netrefil hraniční čáru mezikruží. Ve vnitřním mezikruží bylo tolik zásahů jako v obou zbývajících částech dohromady a střelec získal celkem 168 bodů. Kolik zásahů bylo v jednotlivých částech terče?

Řešení

Označíme-li x, y, z počty zásahů v jednotlivých oblastech terče, musí být celkový počet bodů $8x + 12y + 20z$ roven číslu 168. Podmínku o rozložení zásahů v jednotlivých částech terče můžeme vyjádřit vztahem $y = x + z$. Dostáváme tedy soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 8x + 12y + 20z &= 168 \\ -x + y - z &= 0\,, \end{aligned}$$

kde x, y, z jsou nezáporná celá čísla. Soustavu můžeme dále upravit na tvar

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 42 \\ -x + y - z &= 0\,. \end{aligned}$$

Vyloučíme-li např. neznámou x, dostáváme rovnici $5y + 3z = 42$, odkud lze vyjádřit $z = \dfrac{42 - 5y}{3}$, nebo-li

$$z = 14 - \frac{5y}{3}.$$

Protože však hledáme celočíselná řešení, musí být zřejmě y násobek tří. Současně z druhé rovnice soustavy dostáváme $x = y - z \geq 0$, neboli $y \geq z$. Volíme-li jednotlivé možnosti, dostáváme

$y = 0, z = 14$ nevyhovuje

$y = 3, z = 9$ nevyhovuje
$y = 6, z = 4, x = 2$
$y = 9, z = -15$ nevyhovuje
a s rostoucím y zřejmě bude hodnota z dále klesat.

Závěr

Počty zásahů v jednotlivých částech terče byly 2 za 8 bodů, 6 za 12 bodů a 4 za 20 bodů.

Recenzent

RNDr. Michal Vavroš, Ph.D., Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Rozdělení pozemku

Mgr. Tomáš Krchňák
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
krchnak@gym669ova.cz

Zadání

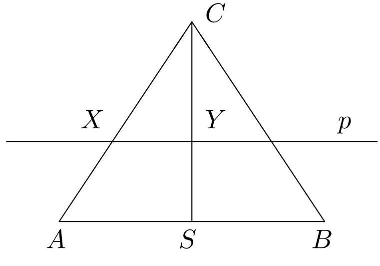
Je dán pozemek tvaru rovnostranného trojúhelníku o straně a. Tento pozemek je třeba rozdělit cestou rovnoběžnou s jednou ze stran na dva útvary (trojúhelník a lichoběžník) se stejným obsahem. Vypočtěte vzdálenost cesty od této strany (šířku cesty zanedbejte).

Řešení

Označme trojúhelník ABC, S střed strany AB, průsečíky přímky p s úsečkami AC, SC postupně X, Y (viz. obrázek). Potom platí, že $\triangle ASC$ je podobný $\triangle XYC$ a zároveň požadujeme, aby $S_{\triangle XYC} = \frac{1}{2} S_{\triangle ASC}$. Koeficient podobnosti takových trojúhelníků je $\sqrt{\frac{1}{2}}$, tedy $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Protože $|SC| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, pak

$$|YC| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

Vzdálenost přímky p od AB potom určíme jako rozdíl vzdáleností $|SC|$ a $|YC|$.



Závěr

Hledaná vzdálenost je tedy

$$|SY| = |SC| - |YC| = \frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{6}}{4} = \frac{a(2\sqrt{3} - \sqrt{6})}{4}.$$

Recenzent

Mgr. Lada Stachovcová, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Teplotní stupnice

RNDr. Eva Davidová
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
davidova@gym669ova.cz

Motivace

Nejpoužívanější teplotní stupnicí ve světě je **Celsiova stupnice** používaná od roku 1736. Jejím autorem je švédský matematik, fyzik, geodet a astronom Anders Celsius.
V anglosaských zemích se používá **Fahrenheitova teplotní stupnice**. Autorem je německý fyzik, člen královské společnosti v Londýně, Daniel Gabriel Fahrenheit, který zkonstruoval lihový (1709) a rtuťový teploměr (1714) s vlastní stupnicí.

Zadání

Vztah Celsiovy a Fahrenheitovy stupnice je vyjádřen pomocí lineární závislosti. Platí, že
bod mrazu vody je roven 32 °F a
bod varu vody je roven 212 °F .
Existuje teplota, kterou lze v obou stupnicích vyjádřit stejnou číselnou hodnotou? Jaká teplota to je?

Řešení

z výše uvedeného vztahu obou teplotních stupnic plyne:

$$\begin{aligned} 0\,^\circ\mathrm{C} &\quad \ldots \quad 32\,^\circ\mathrm{F} \\ 100\,^\circ\mathrm{C} &\quad \ldots \quad 212\,^\circ\mathrm{F} \end{aligned}$$

Dosazením těchto hodnot do rovnice lineární závislosti $y = ax+b$ dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 32 &= 0 \cdot a + b \\ 212 &= 100 \cdot a + b. \end{aligned}$$

z první rovnice dostáváme $b = 32$ a dosazením do rovnice druhé pak

$$212 = 100 \cdot a + 32,$$

neboli $a = \frac{9}{5}$. Pro hledanou teplotu má platit $x = y$, tedy

$$x = \tfrac{9}{5}x + 32,$$

odkud už snadno vyjádříme $x = -40$.

Závěr

Hledaná teplota tedy je $-40°\mathrm{C} = -40°\mathrm{F}$.

Recenzent

Mgr. Lada Stachovcová, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Encyklopedie

Mgr. Iwona Marzec
Publiczne Gimnazjum w Dwikozach, ul. Spoldzielca 12, 27-620 Dwikozy
lukem@poczta.onet.pl

Zadání

Na očíslování stran v encyklopedii bylo použito 6869 číslic. Kolik stran má encyklopedie?

Řešení

Na očíslování prvních devíti stran potřebujeme 9 číslic $(1, 2, \ldots, 9)$.
Na dvojciferné strany $(10, 11, 12, \ldots, 99)$ je třeba 180 číslic,

$$\underbrace{10, 11, 12, \ldots, 99}_{2\cdot 90=180}.$$

Trojciferné strany potřebují k očíslování 2700 číslic,

$$\underbrace{100, 101, 102, \ldots, 999}_{3\cdot 900=2700}.$$

Celkem už tedy máme $9+180+2700 = 2889$ číslic pro 999 stran. Na 4-ciferné strany nám tedy zbývá $6869 - 2889 = 3980$ číslic, což odpovídá počtu

$$3980 : 4 = 995$$

čtyřciferných stran.

Závěr

Encyklopedie má $999 + 995 = 1994$ stran.

Recenzent

RNDr. Michal Vavroš, Ph.D., Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Úloha o kružnicích

Mgr. Libor Klubal
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
klubal@gym669ova.cz

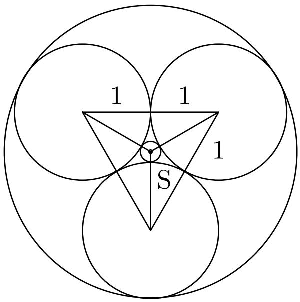
Zadání

Tři kružnice s poloměrem 1 cm jsou sestrojeny tak, že se každá dotýká zbývajících dvou kružnic. Určete poloměry dalších dvou kružnic, které se dotýkají všech tří zadaných kružnic.

Řešení

Hledané dvě kružnice mají společný střed v těžišti rovnostranného trojúhelníka, jehož vrcholy jsou středy zadaných kružnic (viz. obrázek). Délka těžnice tohoto trojúhelníka je podle Pythagorovy věty rovna $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, proto vzdálenost středu S a středu každé ze zadaných kružnic (tzn. vzdálenost těžiště od vrcholu trojúhelníka) je $\frac{2}{3}\sqrt{3}$. Dostáváme tak

$r_1 = \frac{2}{3}\sqrt{3} + 1$ – poloměr větší kružnice
$r_2 = \frac{2}{3}\sqrt{3} - 1$ – poloměr menší kružnice



Závěr

Hledané poloměry jsou tedy $\frac{2}{3}\sqrt{3} \pm 1$.

Recenzent

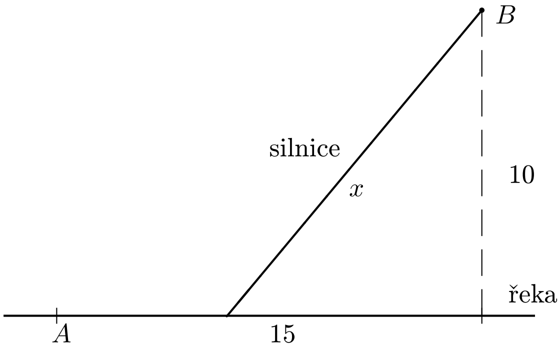
RNDr. Michal Vavroš, Ph.D., Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Doprava po řece

Mgr. Jana Gajdušková
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
gajduskova@gym669ova.cz

Zadání

Z města A, které leží u řeky, je třeba dovážet zboží do místa B, které je ve vzdálenosti 15 km směrem po toku řeky a ve vzdálenosti 10 km od břehu (viz obr.). Je třeba vybudovat silnici z B k řece, aby převážení nákladů bylo co nejlevnější, přičemž dopravné za převoz po silnici je dvakrát dražší než po řece. Určete délku silnice z místa B k řece a úhel, který svírá silnice se směrem toku řeky.



Řešení

Označme y vzdálenost bodu A od místa vyústění silnice. Protože dopravné po silnici je dvakrát dražší než po řece, musí být součet

$$m = y + 2x \tag{1}$$

co nejmenší. Dále $y = 15 - |DC|$ a $|DC| = \sqrt{x^2 - 10^2}$. Tedy $y = 15 - \sqrt{x^2 - 10^2}$ a po dosazení do (1) je „cena“ za dopravu

$$m = 15 - \sqrt{x^2 - 10^2} + 2x\,. \tag{2}$$

Hledejme minimum funkce m, jejíž definiční obor je $\left\langle 10, \sqrt{10^2+15^2}\right\rangle$. Vztah (2) upravíme na tvar $\sqrt{x^2-10^2} = 15 - m + 2x$ a po umocnění a úpravách dostáváme kvadratickou rovnici s neznámou x a parametrem m:

$$3x^2 + 4(15-m)x + (15-m)^2 + 100 = 0, \tag{3}$$

jejíž diskriminant je $D = 4(15-m)^2 - 1200$. Aby měla rovnice reálné řešení, musí být $D \geq 0$, tedy

$$\begin{aligned} 4(15-m)^2 - 1200 &\geq 0 \\ (15-m)^2 &\geq 300 \\ |15-m| &\geq 10\sqrt{3} \end{aligned}$$

neboli $(15-m)^2 \geq 300$. Protože však m je větší než 15 (plyne ze zadání úlohy), je

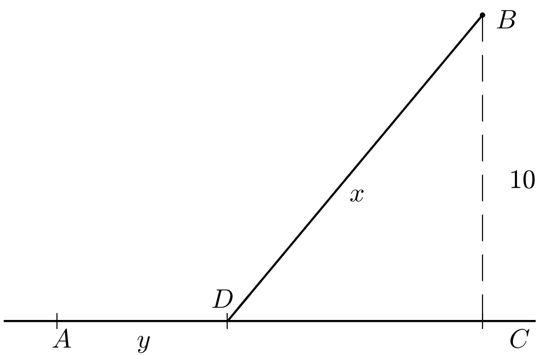
$$m - 15 \geq 10\sqrt{3}\,,$$

neboli $m \geq 10\sqrt{3}+15$. Pak minimální hodnota m je $m = 10\sqrt{3}+15$, odkud dosazením do D dostáváme nulový diskriminant. Potom řešením rovnice (3) je

$$x = \frac{-4(15-m)}{2\cdot 3} = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20\sqrt{3}}{3}\,.$$

Dále

$$\sin(\sphericalangle BDC) = \frac{10}{x} = \frac{30}{20\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad \text{tedy} \ \ |\sphericalangle BDC| = 60\,^\circ\,.$$



Pozn. Minimum funkce (2) je možno hledat snadněji také pomocí derivace, která se probírá ve 4. ročníku gymnázií. Derivace funkce m je rovna

$$m' = \frac{-x}{\sqrt{x^2 - 100}} + 2$$

a z podmínky $m' = 0$ plyne

$$-\frac{x}{\sqrt{x^2 - 100}} = -2\,,$$

odkud $x^2 = \frac{400}{3}$, neboli $x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

Závěr

Délka silnice z místa B k řece je $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}$ km. Silnice svírá s řekou úhel 60°.

Recenzent

Mgr. Tomáš Krchňák, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Definiční obory logaritmických funkcí

MGR. TOMÁŠ KRCHŇÁK
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
krchnak@gym669ova.cz

Motivace

Pro správné narýsování grafu funkce je prioritní určit její definiční obor. Pro řešení tohoto příkladu je dále nezbytně nutné znát přesně definici logaritmické funkce.

Zadání

Určete definiční obory daných funkcí, načrtněte jejich grafy v kartézské soustavě souřadnic a určete, které z těchto funkcí jsou sudé, resp. liché:

1. $f_1: \ y = \log_{|x|}\left(|x|\right)^{|x|}$
2. $f_2: \ y = \log_{|x|}\left(|x|\right)^{x}$
3. $f_3: \ y = \log_{x^2}\left(x^2\right)^{x^2}$
4. $f_4: \ y = \log_{x}\left(|x|\right)^{|x|}$

Řešení

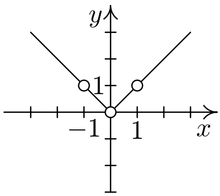
Podle definice logaritmické funkce platí, že

$$a^{\log_a r} = r,$$

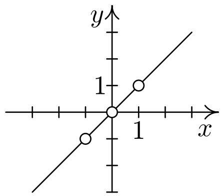
a dále platí, že základem logaritmu je libovolné kladné reálné číslo různé od jedné. Pro dané funkce tedy platí:

1. $y = |x| \cdot \log_{|x|}\left(|x|\right) = |x|;\ D\left(f_1\right) = \mathbb{R} \backslash \{-1; 0; 1\}$, funkce je sudá, viz. obr. 1.
2. $y = x \cdot \log_{|x|}\left(|x|\right) = x;\ D\left(f_2\right) = \mathbb{R} \backslash \{-1; 0; 1\}$, funkce je lichá, viz. obr. 2.
3. $y = x^2 \cdot \log_{x^2}\left(x^2\right) = x^2;\ D\left(f_3\right) = \mathbb{R} \backslash \{-1; 0; 1\}$, funkce je sudá, viz. obr. 3.

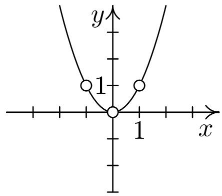
4. $y = \log x \cdot \log_x x = \log x$; $D\,(f_4) = \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$, funkce není ani sudá, ani lichá, viz. obr. 4.



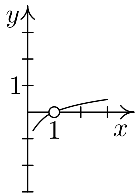
obr. 1



obr. 2



obr. 3



obr. 4

Recenzent

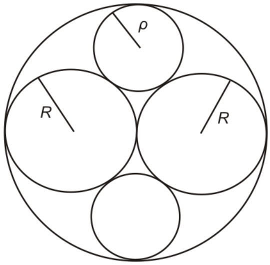
RNDr. Michal Vavroš, Ph.D., Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Bottles in basket

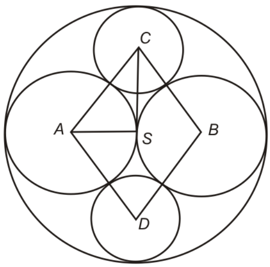
Mgr. Lada Stachovcová
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
davidova@gym669ova.cz

Problem

Two bottles with radius R are standing in a round basket with radius $2R$. To support them two smaller bottles with radius ρ are to be put in the basket (see picture). Find the ratio of ρ to R.



Solution



Let S denotes the centre of the circle substituting the basket, A, B, C, D the centres of the bottles. Let $v = |CS|$. Then, for the parameters R, v, ρ there is $\rho + v = 2R$, or

$$v = 2R - \rho\,. \tag{1}$$

Further, in the triangle ASC the relation

$$(\rho + R)^2 = R^2 + v^2$$

holds. Using (1) we get

$$\rho^2 + 2\rho R + R^2 = R^2 + 4R^2 - 4\rho R + \rho^2 \,,$$

and after simplifying

$$\begin{aligned} 6\rho R &= 4R^2 \\ \rho &= \frac{2R}{3} \end{aligned}$$

Conclusion

The ratio of ρ to R is

$$\rho : R = 2 : 3 \,.$$

Reviewers

RNDr. Eva Davidová, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
Mgr. Šárka Kolková, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Kvadratická rovnice

RNDr. Michal Vavroš, Ph.D.
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
vavros@gym669ova.cz

Zadání

Určete všechny dvojice $[p, q]$ přirozených čísel takové, že kvadratická rovnice

$$x^2 - 2px + 3q = 0$$

má reálné kořeny, kterými jsou největší společný dělitel a nejmenší společný násobek přirozených čísel p, q, tj. čísla $D(p, q)$ a $n(p, q)$.

Řešení

Je třeba si uvědomit dvě skutečnosti:

- vztah mezi $D(p, q)$ a $n(p, q)$

$$D(p, q) \cdot n(p, q) = p \cdot q \tag{1}$$

- vztah mezi kořeny $x_1 = D(p, q), x_2 = n(p, q)$ a koeficienty kvadratické rovnice (Viètovy vzorce)

$$\begin{aligned} D(p, q) + n(p, q) &= 2p & (2) \\ D(p, q) \cdot n(p, q) &= 3q & (3) \end{aligned}$$

Odkud porovnáním vztahů (3) a (1) ihned plyne, že $p = 3$. Po dosazení do (2) dostáváme $D(p, q) + n(p, q) = 6$.
Má-li mít kvadratická rovnice oba kořeny reálné, platí pro její diskriminant D podmínka, že je nezáporný. Tedy

$$D = 4p^2 - 12q = 36 - 12q \geq 0 \Rightarrow q \leq 3.$$

z uspořádaných dvojic $[3; 1], [3; 2], [3; 3]$ vybereme ty, které vyhovují podmínkám úlohy.

Závěr

Podmínky úlohy splňuje jediná dvojice přirozených čísel $[3; 3]$.

Recenzent

Mgr. Lada Stachovcová, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Konstrukce trojúhelníka

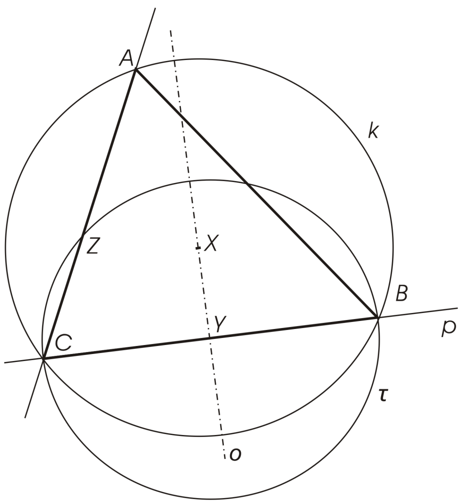
Mgr. Libor Klubal
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
klubal@gym669ova.cz

Zadání

Jsou dány tři různé body X, Y, Z. Zapište postup, jak zkonstruovat trojúhelník ABC, který má střed kružnice opsané v bodě X, bod Y je středem strany BC a úsečka BZ je jeho výškou, kde Z je pata výšky. Najděte takovou polohu bodů X, Y, Z, kdy úloha nemá řešení.

Řešení

XY je osa strany BC, na které leží Y. Úsečka BC tedy leží na přímce p, která je kolmá k XY a prochází bodem Y. Zřejmě $|\sphericalangle BZC| = 90°$, existuje tedy Thaletova kružnice se středem v bodě Y a průměrem BC. Odtud $|BY| = |CY| = |ZY|$. Body B, C tedy leží na přímce p kolmé na XY a jejich vzdálenost od bodu Y je $|ZY|$. Nyní sestrojíme kružnici k se středem v bodě X a poloměrem $|XB|$. Bod A leží na průniku kružnice k a přímky CZ.



Závěr

Úloha nemá řešení, pokud Y je středem úsečky XZ – v tom případě je přímka CZ tečnou kružnice k a bod C je jediným společným bodem kružnice k a přímky CZ. Body A a C splynou.

Recenzenti

RNDr. Michal Vavroš, Ph.D., Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Build a bridge

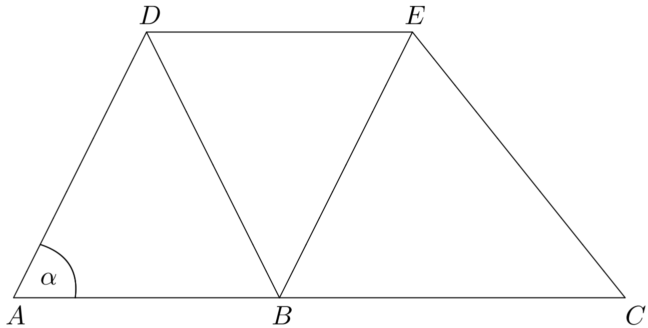
RNDr. Eva Davidová
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
davidova@gym669ova.cz

Motivation

How to solve a trapezium?

Problem

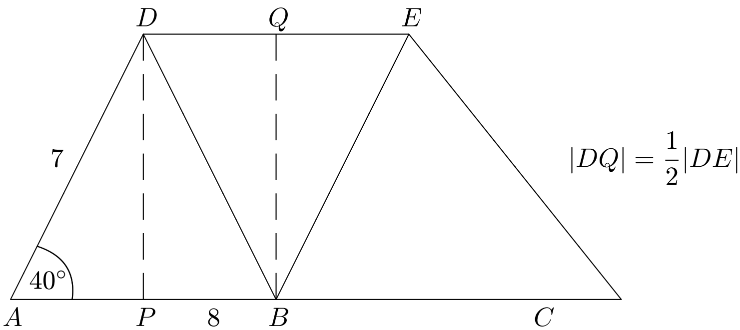
John Smith, an engineer, has to solve the following problem: In the truss for a bridge shown in the picture, $DE||AC$, $|BD| = |BE|$, $|AB| = 8\,\mathrm{m}$, $|AD| = 7\,\mathrm{m}$ and $\alpha = 40°$. What is the length DE?



Solution

We can find $|DQ|$ by using the Pythagorean theorem in right ΔDQB if we can find $|DB|$ and $|BQ|$.
We can find $|DB|$ by using the law of cosines in ΔABD.
We can find $|PD|$ equal to $|BQ|$ from right ΔAPD.

$$
\begin{aligned}
|BQ| &= |PD| = |AD| \cdot \sin\alpha = 7 \cdot \sin 40^\circ \\
|BD|^2 &= 8^2 + 7^2 - 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cos 40^\circ = 27,20 \\
|BD| &= 5,2156 \\
|DQ|^2 &= |BD|^2 - |BQ|^2 = 6,9574 \\
|DQ| &= 2,6377 \\
|DE| &= 2 \cdot |DQ| = 5,275
\end{aligned}
$$



Conclusion

The length $|DE|$ is 5,275 m.

Reviewers

Mgr. Jana Gajdušková, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
Mgr. Šárka Kolková, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Zadanie o tarczy

strona 13

Podczas strzelania do tarczy w kształcie koła można uzyskać następujące liczby punktów: trafienie w środek tarczy – 20 punktów; trafienie w pierścień kołowy wewnętrzny – 12 punktów; trafienie w pierścień zewnętrzny – 8 punktów. W czasie zawodów strzeleckich strzelec zawsze trafił w tarczę i nigdy nie trafił linii granicznych pierścieni. W pierścieniu wewnętrznym było tyle trafień, ile w pozostałych dwóch częściach tarczy razem, przy czym strzelec uzyskał łącznie 168 punktów. Ile trafień było w poszczególnych częściach tarczy?

Podział parceli

strona 15

Dana jest parcela w kształcie trójkąta równobocznego o boku a. Parcelę należy rozdzielić na dwie figury (trójkąt i trapez) o tym samym polu powierzchni ścieżką równoległą do jednego z boków trójkąta. Oblicz odległość ścieżki od danego boku (szerokości ścieżki nie uwzględniaj).

Skale temperatur

strona 17

Związek skal temperatur Celsjusza i Fahrenheita wyraża zależność liniowa. Punkt zamarzania wody wynosi 32 °F, a punkt wrzenia wody wynosi 212 °F.

Czy istnieje temperatura, którą można w obu skalach wyrazić jednakową wartością liczbową? Jaka to temperatura?

Encyklopedia

strona 19

Do ponumerowania stronic w encyklopedii użyto 6869 cyfr. Ile stronic ma encyklopedia?

Zadanie o okręgach.

strona 20

Trzy okręgi o promieniach 1cm zbudowano tak, że każdy jest styczny do pozostałych dwóch okręgów. Oblicz promienie takich dwóch okręgów, które są styczne do wszystkich trzech zbudowanych okręgów.

Transport rzeczny

strona 21

Z miasta A, które leży nad rzeką, trzeba dowozić towar do miejsca B, które znajduje się w odległości 15km z biegiem rzeki i w odległości 10km od brzegu (patrz rys.). Należy wybudować szosę z B do rzeki tak, aby transport towarów był jak najtańszy, przy czym opłata za transport po szosie jest dwa razy droższa aniżeli po rzece. Oblicz długość szosy z miejsca B do rzeki oraz kąt, który zawiera szosa z kierunkiem biegu rzeki.

Dziedziny funkcji logarytmicznych

strona 24

Motywacja: W celu poprawnego narysowania wykresu funkcji należy priorytetowo wyznaczyć jej dziedzinę. Aby rozwiązać dane zadanie, trzeba koniecznie znać dokładnie definicję funkcji logarytmicznej.

Tekst zadania: Wyznacz dziedziny podanych funkcji, naszkicuj ich wykresy w kartezjańskim układzie współrzędnych oraz określ, które z nich są parzyste względnie nieparzyste.

1. $f_1: \ y = \log_{|x|} (|x|)^{|x|}$
2. $f_2: \ y = \log_{|x|} (|x|)^{x}$
3. $f_3: \ y = \log_{x^2} \left(x^2\right)^{x^2}$
4. $f_4: \ y = \log_{x} (|x|)^{|x|}$

Równanie kwadratowe

strona 28

Wyznacz wszystkie pary $[p, q]$ liczb naturalnych, takich, że równanie kwadratowe

$$x^2 - 2px + 3q = 0$$

ma pierwiastki rzeczywiste, którymi są największy wspólny dzielnik oraz najmniejsza wspólna wielokrotność liczb naturalnych p, q, to zn. $\mathrm{NWD}(p, q)$ i $\mathrm{NWW}(p, q)$.

Konstrukcja trójkąta

strona 30

Dane są trzy różne punkty X, Y, Z. Napisz, jak zbudować trójkąt ABC, który ma środek okręgu opisanego w punkcie X, punkt Y jest środkiem boku BC i odcinek BZ jest jego wysokością, przy czym Z to spodek wysokości. Znajdź takie położenie punktów X, Y, Z, gdy zadanie nie ma rozwiązania.

Autor překladu: Mgr. Wanda Samek, Gymnázium Třinec

Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, příspěvková organizace

Sborník příkladů ze soutěže Moravskoslezský matematický šampionát 2006

Ostrava 15. 11. 2006

Název	**Moravskoslezský matematický šampionát 2006**
Editor	**RNDr. Eva Davidová**
Vydavatel	**Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, p.o.** **Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba**
Náklad	**350 ks**
Rozsah	**40 stran**
Vydání	**první, 2006, revize 2 – elektronická**
Tisk	**Repronis Ostrava**
Doporučená cena	**zdarma**

Texty neprošly jazykovou úpravou.

ISBN 80-87058-03-8