Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
příspěvková organizace

Občanské sdružení Okna

Moravskoslezský matematický šampionát 2007

Sborník

Ostrava-Poruba
23. 10. 2007

ISBN 80-87058-04-6

Organizační výbor

Mgr. Bc. Libor Klubal	hlavní organizátor
RNDr. Eva Davidová	odborný matematický dohled, editor sborníku
RNDr. Michal Vavroš, Ph.D.	sborník, spolupráce s partnerskými školami
Mgr. Lada Stachovcová	sborník, technická podpora

RNDr. Jitka Bukovanská, Mgr. Jana Gajdušková

Mgr. Tomáš Krchňák, Mgr. Jan Netolička, Mgr. Jarmila Pecová

Mgr. Iwona Marzec, Mgr. Wanda Samek

Obsah

Milí matematici,

pětka je pěkné číslo. Tedy alespoň pro náš Moravskoslezský matematický šampionát, na jehož pátém ročníku vás upřímně vítám. O jeho rostoucí úrovni a prestiži nemluví jen zvyšující se počty účastníků, ale i zvětšující se okruh škol, které reprezentují. Možná bychom i slovo „moravskoslezský“ mohli nahradit slovem „středoevropský“. Proto Vám mohu poprvé v historii naší odborné soutěže sdělit, že záštitu nad ní převzal hejtman Moravskoslezského kraje Evžen Tošenovský. Mnoho úspěchů vám přeje i prezident České republiky Václav Klaus, který si „*cení každé aktivity školy, která vede ke zdokonalování znalostí studentů, a takový mezinárodní šampionát je výborný nápad.*“

Antonín Balnar, ředitel gymnázia

Úvodní slovo

Prof. Ing. Kamil Wichterle, DrSc.

K objevu čísel došli lidé nezávisle ve všech starých civilizacích, pravděpodobně už tehdy, kdy si vytvořili první jednoduchý jazyk. Čísla patřila asi vůbec k prvním teoretickým pojmům a překvapivě byla schopna žít svůj vlastní život, bez ohledu na to, co se počítá. Tak vznikla matematika a postupně se zdokonalovala. Mne jako středoškoláka na matematice zaujalo to, že je (řečí sportu) hrou s jasnými pravidly na dobře nalajnovaném hřišti. V jiných vědách je občas zapotřebí nějakou nedokonalou teorii zavrhnout a aspoň na čas ji nahradit něčím o trochu lepším. Matematika nejvýše občas musí na hřišti zamést něco, co předchůdci neudělali dost pozorně, ale jinak zde pravidla pořád bez výhrad platí. Pokrok v matematice umožňuje jen něco přidat, doplnit nebo rozšířit třeba i další hřiště, na kterém se bude hrát podle pravidel složitějších.

Matematici jsou někdy karikováni jako podivné nepraktické osobnosti, avšak k nejzajímavějším výbojům oboru přispěli spíše ti, pro které je matematika obrazem reality a kteří ji používají k popisu světa. Když se podíváme do historie, tak mezi významnými matematiky najdeme fyziky, astronomy, inženýry i přírodovědce. Bez měření a počítání by nebylo moderní vědy a techniky, svůj kus matematiky potřebují dnes i zdánlivě mimoběžné obory jako jsou ekonomie, jazykověda nebo lékařství, nový kus matematiky vyžaduje umělá inteligence počítačů. Je jen trapné, že mezi tzv. celebritami z kultury, sportu a politiky se najdou dosud tací, kteří se svým matematickým ignorantstvím veřejně holedbají. Trénink přesného vyjadřování a logiky prostřednictvím řešení matematických úloh je užitečný pro každého vzdělaného člověka. Hezké na něm je to, že výsledkem řešení je buďto jediné číslo, nebo naprosto přesně vymezená množina. Takže se dá vždy říci, zda bylo cíle dosaženo. Zručný řešitel si kromě správnosti zakládá ještě na „uměleckém dojmu“ - chce dojít k cíli elegantně a co nejrychleji. Moravskoslezský matematický šampionát 2007 již vyrostl z dětských střevíčků a stává se peknou tradicí. Oceňuji tým organizátorů, který si vybral nelehký cíl sestavovat takové zajímavé úlohy z praktického života, jejichž řešení soutěžící trochu potrápí a přitom se dá ve vymezeném čase zvládnout.

Soutěžícím přeji, aby všechny nástrahy úloh šampionátu úspěšně a s elegancí překonali. A ať už jejich skóre zde bude jakékoliv a ať je po maturitě život postaví kamkoliv, přeji jim, aby je nepřestal těšit matematický řád a přesnost a aby si dále zdokonalovali své kombinační schopnosti, které si v Moravskoslezském matematickém šampionátu zkusili změřit.

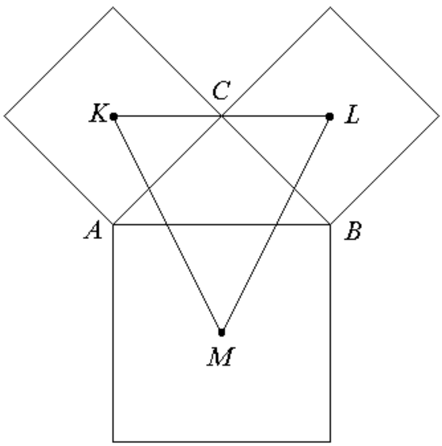
Úloha o trojúhelníku

Mgr. Iwona Marzec
Publiczne Gimnazjum w Dwikozach, ul. Spoldzielca 12, 27-620 Dwikozy
lukem@poczta.onet.pl

Zadání

Nad stranami rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami délky 4 cm jsou zvnějšku sestrojeny čtverce. Vypočtěte obvod trojúhelníku, jehož vrcholy jsou středy těchto čtverců.

Řešení



Označme podle obrázku A, B, C vrcholy zadaného trojúhelníka, K, L, M středy příslušných čtverců. Je zřejmé, že body K a L leží na rovnoběžce se stranou AB a jejich vzdálenost je rovna délce této úsečky, tj.

$$|KL| = |AB| = 4\sqrt{2}.$$

Úsečka CM je výškou trojúhelníka KLM a pro její délku platí $|CM| = 4\sqrt{2}$, protože trojúhelník AMB je shodný s daným trojúhelníkem ACB.

Pro stranu KM platí

$$|KM| = \sqrt{|CM|^2 + |CK|^2} = \sqrt{32 + 8} = 2\sqrt{10}.$$

Obvod trojúhelníka KLM je pak roven

$$o = 2\sqrt{10} + 2\sqrt{10} + 4\sqrt{2} = 4\left(\sqrt{10} + \sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2}\left(\sqrt{5} + 1\right) \text{ cm}.$$

Recenzent

RNDr. Eva Davidová, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Jízdenky

RNDr. Jitka Bukovanská
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
bukovanska@gym669ova.cz

Zadání

Na historické železniční trati z Wichterlova do Dwikoz se zvýšil počet zastávek. Aby mohly být ve vlaku bez výpočetní techniky prodávány jízdenky z každé stanice do libovolné jiné, musela tiskárna dotisknout 46 nových druhů jízdenek. Určete, kolik stanic bylo původně a kolik jich je nyní.

Řešení

Označme počet starých zastávek x a počet nových y. Z každé staré stanice do nové se musí dotisknout $x \cdot y$ jízdenek. Z každé nové stanice do staré a mezi novými navzájem se musí dotisknout $y \cdot (x + y - 1)$ jízdenek. Platí tedy celkem

$$xy + y(x + y - 1) = 46.$$

Po úpravách dostaneme $2xy + y^2 - y = 46$ a dále

$$y(2x + y - 1) = 46.$$

Číslo 46 podle podmínek úlohy rozložíme dvěma způsoby:

1. $y(2x + y - 1) = 1 \cdot 46$. Z toho vyplývá, že $y = 1$, a zároveň tedy $2x + 1 - 1 = 46$, neboli $x = 23$.

2. $y(2x + y - 1) = 2 \cdot 23$. Z toho vyplývá, že $y = 2$, a zároveň tedy $2x + 2 - 1 = 23$, neboli $x = 11$.

Závěr

Původně bylo na trati buď 23 zastávek a přibyla 1, nebo bylo 11 zastávek a jejich počet se zvýšil o 2.

Recenzent

Mgr. Jana Gajdušková, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Trojciferá čísla

Mgr. Jarmila Pecová
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
pecova@gym669ova.cz

Zadání

Najděte trojciferná čísla aab, ccd, bbd, kde a, b, c, d jsou navzájem různé cifry, přičemž platí

$$\begin{aligned} aab + ccd &= 1000 \\ aab - ccd &= bbd + 1\ . \end{aligned}$$

Řešení

Je zřejmé, že a, b, c, d jsou kladná přirozená čísla menší než 10. Pro přehlednost napíšeme součty pod sebe:

$$\begin{array}{r} \\ a\,a\,b \\ +c\,c\,d \\ \hline 1\,0\,0\,0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} b\,b\,d \\ c\,c\,d \\ 1 \\ \hline a\,a\,b \end{array}$$

Zaměřme se na výpočet b a d. Z prvního součtu plyne, že

$$b + d = 10. \tag{1}$$

U druhého součtu dostáváme dvě možnosti:

1. Pokud $2d + 1 = b$, pak společně s (1) dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} 2d + 1 &= b \\ b + d &= 10, \end{aligned}$$

   jejímž řešením je $b = 7$ a $d = 3$.

2. V případě, že $2d + 1 = 10 + b$, pak opět společně s (1) dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 2d + 1 &= 10 + b \\ b + d &= 10 \end{aligned}$$

   Výpočtem zjistíme, že $d = \frac{19}{3}$, což ovšem nevyhovuje zadání úlohy.

Dosazením b a d do druhého součtu

$$\begin{array}{r} 7\,7\,3 \\ c\,c\,3 \\ 1 \\ \hline a\,a\,7 \end{array}$$

získáme vztah mezi c a a

$$7 + c = a. \tag{2}$$

Z prvního součtu současně plyne $a + c + 1 = 10$, a tedy společně se vztahem (2) dostaneme $c = 1$ a $a = 8$.

Závěr

Hledaná čísla jsou $aab = 887$, $ccd = 113$ a $bbd = 773$.

Recenzent

Mgr. Tomáš Krchňák, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Zapeklitá rovnice

RNDr. Eva Davidová
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
davidova@gym669ova.cz

Zadání

Najděte celé číslo t a číslici a tak, aby platilo

$$[3 \cdot (230 + t)]^2 = 492a04.$$

Řešení

Upravme danou rovnici na tvar

$$9(230 + t)^2 = 492a04.$$

Má-li být číslo t celé, musí být pravá strana rovnice dělitelná devíti. Tedy ciferný součet čísla $492a04$ musí být také dělitelný devíti. Ciferný součet je $19 + a$, a proto a může být jedině rovno 8.

Pak řešením rovnice $9(230 + t)^2 = 492804$ dostáváme

$$(230 + t)^2 = 54756 = 234^2,$$

a tedy

$$230 + t = 234 \ \text{ nebo } \ 230 + t = -234,$$

odkud po výpočtu $t_1 = 4,\ t_2 = -464$.

Závěr

Zadaná rovnice má celočíselná řešení pouze pro $a = 8$. Jsou jimi čísla $t_1 = 4$ a $t_2 = -464$.

Recenzent

RNDr. Michal Vavroš, Ph.D., Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Společná část dvou kruhů

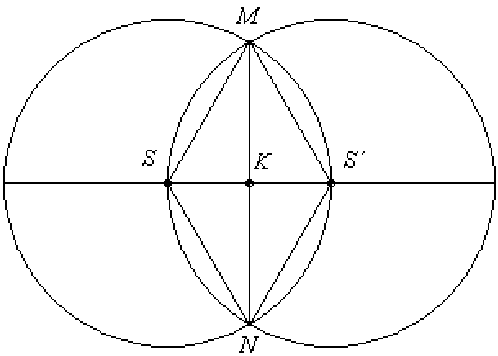
RNDr. Eva Davidová
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
davidova@gym669ova.cz

Zadání

Dvě kružnice o poloměru 1 dm se protínají tak, že střed jedné leží na druhé. Určete obsah společné části jimi určených kruhů.

Řešení

Společná část obou kruhů se skládá ze dvou shodných kruhových úsečí. Trojúhelník $SS'M$ je rovnostranný, velikost každého jeho vnitřního úhlu je tedy $60°$.



Obsah jedné této úseče vypočteme jako obsah výseče s poloměrem 1 dm a se středovým úhlem $120°$, od kterého odečteme obsah trojúhelníka SMN, tedy

$$S = \frac{1}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Obsah společné části dvou kruhů je pak dvojnásobný, tj. $2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ dm^2.

Recenzent

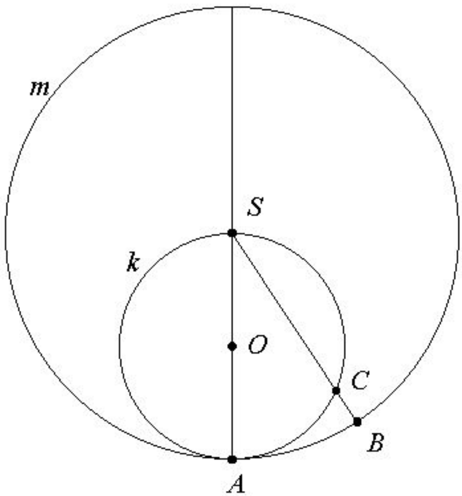
Mgr. Jarmila Pecová, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Oblouky kružnic

RNDr. Eva Davidová
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
davidova@gym669ova.cz

Zadání

Jsou dány dvě kružnice $k(O;r)$ a $m(S;2r)$, které mají vnitřní dotyk v bodě A (viz obrázek). Polopřímka vedená bodem S protne kružnici m v bodě B a kružnici k v bodě C. Dokažte, že kruhový oblouk AB na kružnici m má tutéž délku jako oblouk AC na kružnici k.



Řešení

Úhel ASC v kružnici k je obvodovým úhlem příslušným k oblouku AC. Označme jeho velikost α. K němu příslušným středovým úhlem je úhel AOC, který má tedy velikost 2α.

Pro velikosti těchto úhlů v obloukové míře přitom platí

$$|\sphericalangle AOC| = \frac{|\widehat{AC}|}{r} = 2\alpha\ ,\ |\sphericalangle ASB| = \frac{|\widehat{AB}|}{2r} = \alpha.$$

Odtud přímo vyplývá $|\overset{\frown}{AC}| = |\overset{\frown}{AB}| = 2r\alpha$. Oblouky AB a AC mají tedy stejnou délku.

Recenzent

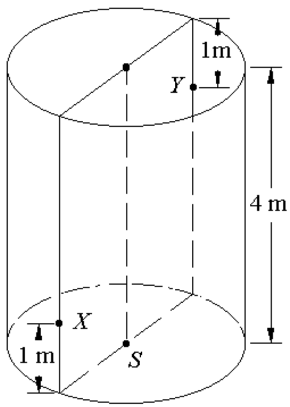
Mgr. Jarmila Pecová, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Úloha o válci

RNDr. Eva Davidová
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
davidova@gym669ova.cz

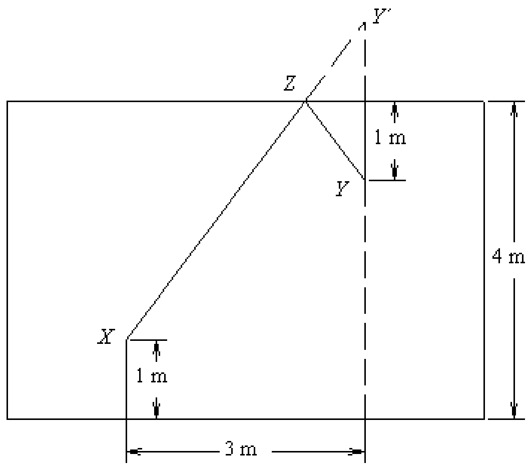
Zadání

Na otevřené nádrži tvaru válce, který má obvod podstavy 6 m a výšku 4 m, máme spojit drátem ukazatel X výšky hladiny na vnější straně nádrže s čidlem Y umístěným na vnitřní stěně (viz obrázek). Jaká je nejkratší možná délka spojovacího drátu, má-li vést po stěně nádrže?



Řešení

Plášť válce rozvineme do roviny a zobrazíme na něm body X a Y. Nejkratší spojnici najdeme užitím osové souměrnosti s osou, kterou je rozvinutá horní hrana nádrže.



Je zřejmé, že $|XZ| + |ZY| = |XY'| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\mathrm{m}$.

Závěr

Nejkratší délka spojovacího drátu je $5\,\mathrm{m}$.

Recenzent

Mgr. Bc. Libor Klubal, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Kružnice se dvěma středy

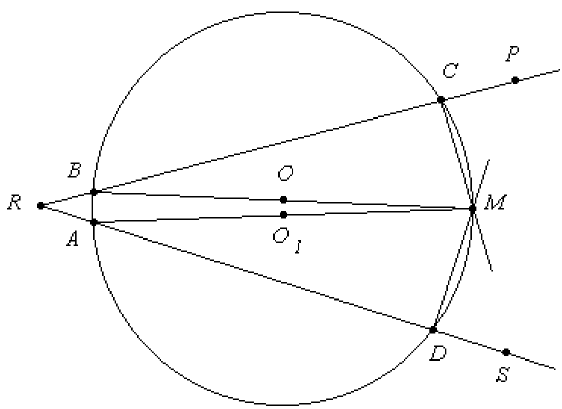
Mgr. Jana Gajdušková
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
gajduskova@gym669ova.cz

Zadání

Narýsujme libovolný ostrý úhel SRP a zvolme dva body C a D po řadě na ramenech RP, RS. Vztyčme kolmice na ramena PR a SR v bodech C, D a jejich průsečík označme M. Bodům C, M, D opíšeme kružnici k. Tato kružnice protne ramena úhlu ve dvou bodech, označme je A a B.

Spojme body A a B s bodem M. Úhel BCM je pravý, tětiva k němu příslušející je tedy průměrem kružnice k, je to úsečka BM. Totéž lze vyvodit pro úsečku AM, protože úhel ADM je pravý. Označme středy těchto úseček po řadě O a O_1. Odtud plyne, že kružnice opsaná bodům C, M, D má dva středy O a O_1 (viz obrázek).

Nalezněte chybu v této úvaze.



Řešení

Ve čtyřúhelníku $CMDR$ jsou úhly u vrcholů C, D pravé, jejich součet je tedy $180°$. Dále součet úhlů u vrcholů M, R je pak $360° - 180°$, tedy $180°$. Ve čtyřúhelníku $CMDR$ je součet jeho protilehlých úhlů roven $180°$, proto je daný čtyřúhelník tětivový.

Z předchozího plyne, že kružnice opsaná bodům C, M, D neprotne ramena úhlu SRP ve dvou bodech, ale prochází nutně vrcholem úhlu R.

Recenzent

RNDr. Michal Vavroš, Ph.D., Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Obvod trojúhelníku

RNDr. Eva Davidová
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
davidova@gym669ova.cz

Zadání

Uvažujme trojúhelník ABC a následující tvrzení:

a) úhel při vrcholu B je pravý

b) úhel při vrcholu A má velikost $30°$

c) $|AB| = 2 \cdot |BC|$

d) $|AC| = 2 \cdot |BC|$

Víme, že platí právě dvě z těchto tvrzení a že $|BC| = 1$. Jaký je obvod trojúhelníku ABC? Určete všechna řešení a odůvodněte je.

Řešení

Existuje celkem šest případů pro výběr dvou výroků ze čtyř uvedených. Ovšem podmínky a) b) d) nastávají současně a takový trojúhelník pak nevyhovuje zadání úlohy. Zbývají proto k diskusi následující tři možnosti:

1. Platí tvrzení a) a c); v pravoúhlém trojúhelníku je pak odvěsna AB dvojnásobkem odvěsny BC, $|BC| = 1$, přepona má délku $\sqrt{5}$ a velikost obvodu je $o = 3 + \sqrt{5}$.

2. Platí tvrzení b) a c); strana AB je dvojnásobkem BC a trojúhelník je tedy opět pravoúhlý, ale s pravým úhlem u vrcholu C. Pro odvěsnu AC platí $|AC| = \sqrt{3}$ a tedy velikost obvodu je $o = 3 + \sqrt{3}$.

3. Platí tvrzení c) a d); trojúhelník je tudíž rovnoramenný se základnou BC a pro obvod platí $o = 1 + 2 + 2 = 5$.

Úloha má celkem tři řešení: $3 + \sqrt{5}$, $3 + \sqrt{3}$ a 5.

Recenzent

Mgr. Jana Gajdušková, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

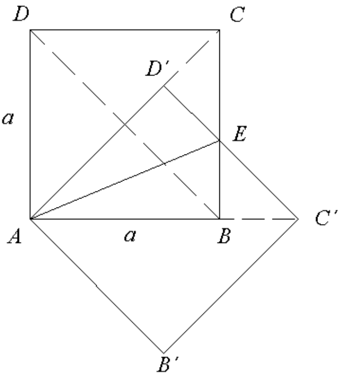
Průnik čtverců

MGR. JARMILA PECOVÁ
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
pecova@gym669ova.cz

Zadání

Je dán čtverec $ABCD$ se stranou délky a. Čtverec $AB'C'D'$ je jeho obrazem v otočení o úhel 45°. Určete obsah průniku obou čtverců.

Řešení



Zvolíme-li záporný směr otáčení, leží bod D' na úhlopříčce AC. Označme E průsečík úseček BC a $C'D'$. Obsah průniku čtverců je roven rozdílu obsahů trojúhelníků ABC a ECD'. Pro úhly v trojúhelníku ECD' platí

$$|\sphericalangle ECD'| = |\sphericalangle CED'| = 45°.$$

Trojúhelník ECD' je pravoúhlý a rovnoramenný, platí tedy $|ED'| = |CD'|$. Jeho obsah vypočítáme jako $S_1 = \frac{1}{2}|D'C| \cdot |D'E|$. Vzhledem k tomu, že

$$|D'C| = a \cdot \sqrt{2} - a = a\left(\sqrt{2} - 1\right),$$

dostáváme $S_1 = \frac{1}{2}a^2\left(\sqrt{2} - 1\right)^2$, neboli

$$S_1 = \frac{1}{2}a^2\left(3 - 2\sqrt{2}\right).$$

Obsah obrazce $ABED'$ označíme S_2. Platí

$$S_2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2}\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = \frac{a^2}{2}\left(1 - 3 + 2\sqrt{2}\right),$$

odkud po úpravě dostáváme

$$S_2 = a^2\left(\sqrt{2} - 1\right).$$

Závěr

Obsah průniku čtverců je roven $a^2\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

Recenzent

RNDr. Jitka Bukovanská, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

On a Right Triangle

RNDr. Eva Davidová
Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
davidova@gym669ova.cz

Problem

Consider a right triangle with $|\sphericalangle C| = 90^\circ$, in which for the sum of sides $a + b = 221$ holds. The length of the height to its hypotenuse c is $v = 60$. Find the lengths of all sides in the triangle.

Solution

In our triangle there is

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

By formula for the area of a triangle we have $\dfrac{ab}{2} = \dfrac{cv}{2}$, after substituting 60 for v and simplifying

$$ab = 60c. \tag{2}$$

Further, together with

$$a + b = 221 \tag{3}$$

we get the system of three equations in the three variables a, b, c, which we can solve for example as follows: by adding $2ab$ to (1) we obtain

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab,$$

or

$$(a + b)^2 = c^2 + 2ab. \tag{4}$$

Substituting (2) and (3) to (4) gives quadratic equation

$$221^2 = c^2 + 120c. \tag{5}$$

Solving the equation (5) we get roots 169 and –289. Obviously, the hypotenuse length must be 169. The lengths of the sides a and b can be found by solving the system of (2) and (3):

$$\begin{aligned} a + b &= 221 \\ ab &= 10140 \end{aligned}$$

Conclusion

The lengths of the sides are 156 and 65, the length of the hypotenuse is 169.

Recension

Mgr. Lada Stachovcová, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
Mgr. Jan Netolička, Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba

Zadanie o trójkącie

strona 9

Nad bokami równoramiennego trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 4 cm zbudowano z zewnątrz kwadraty. Oblicz obwód trójkąta, którego wierzchołki stanowią środki danych kwadratów.

Bilety

strona 11

Na historycznej linii kolejowej z Wichterlova do Dwikoz zwiększono liczbę przystanków. Aby można było sprzedawać bilety z każdej stacji do dowolnej innej bez techniki komputerowej, musiano dodrukować w drukarni 46 nowych rodzajów biletów. Oblicz, ile stacji było pierwotnie i ile ich jest obecnie.

Lizby trzycyfrowe

strona 12

Znajdź trzycyfrowe liczby aab, ccd, bbd, gdzie a, b, c, d to wzajemnie różne cyfry, przy czym:

$$\begin{aligned} aab + ccd &= 1000 \\ aab - ccd &= bbd + 1\ . \end{aligned}$$

Zawikłane równanie

strona 14

Znajdź liczbę całkowitą t i cyfrę a tak, aby

$$[3 \cdot (230 + t)]^2 = 492a04.$$

Wspólna część dwóch kół

strona 15

Dwa okręgi o promieniu 1 dm przecinają się tak, że środek jednego leży na drugim okręgu. Oblicz pole powierzchni wspólnej części kół określonych tymi okręgami.

Łuki okręgów

strona 16

Dane są dwa okręgi $k(O; r)$, $m(S; 2r)$, które są wewnętrznie styczne w punkcie A (patrz rysunek). Półprosta poprowadzona przez punkt S przecina okrąg m w punkcie B i okrąg k w punkcie C. Udowodnij, że łuki AB na okręgu m i AC na okręgu k są tej samej długości.

Zadanie o walcu

strona 18

Na otwartym zbiorniku w kształcie walca, którego obwód wynosi 6 m zaś wysokość 4 m, należy połączyć drutem kontakt X na powierzchni zewnętrznej ze wskaźnikiem wysokości poziomu Y na ścianie wewnętrznej (patrz rysunek). Oblicz najkrótszą możliwą długość drutu, jeżeli ma być prowadzony po ścianie zbiornika.

Okrąg o dwóch środkach

strona 20

Narysujmy dowolny kąt ostry SRP i obierzmy na jego ramionach dwa punkty C i D. Zbudujmy v punktach C, D prostopadłe do ramion PR i SR; te prostopadłe przecinają się w punkcie M. Poprzez punkty C, M, D poprowadzimy okrąg k. Okrąg ten przetnie ramiona kąta w dwóch punktach, oznaczmy je A i B.

Połączmy punkty A i B z punktem M. Kąt BCM jest kątem prostym, odpowiadająca mu cięciwa jest zatem średnicą okręgu k, jest to odcinek BM. To samo można wyprowadzić dla odcinka AM, ponieważ kąt ADM jest kątem prostym. Oznaczmy środki tych odcinków kolejno O i O_1. Wynika stąd, że okrąg poprowadzony przez punkty C, M, D ma dwa środki O i O_1 (patrz rys.).

Znajdź błąd w powyższym rozważaniu.

Obwód trójkąta

strona 22

Rozważmy trójkąt ABC i następujące twierdzenia:

a) kąt przy wierzchołku B jest prosty

b) kąt przy wierzchołku A wynosi $30°$

c) $|AB| = 2 \cdot |BC|$

d) $|AC| = 2 \cdot |BC|$

Wiemy, że obowiązują właśnie dwa z powyższych twierdzeń i że $|BC| = 1$. Oblicz obwód trójkąta ABC. Określ wszystkie rozwiązania i uzasadnij je.

Wspólna część kwadratów

strona 23

Dany jest kwadrat $ABCD$ o boku długości a. Kwadrat $AB'C'D'$ jest jego obrazem w obrocie o kąt $45°$. Oblicz pole powierzchni wspólnej części obu kwadratów.

Trójkąt prostokątny

strona 25

Wiemy, że w trójkącie prostokątnym dla jego przyprostokątnych obowiązuje $a + b = 221$. Wysokość do przeciwprostokątnej wynosi $v = 60$.

Oblicz wszystkie boki tego trójkąta.

Autor překladu: Mgr. Wanda Samek, Gymnázium s polským jazykem vyučovacím v Českém Těšíně

Poznámky

Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, příspěvková organizace

Sborník příkladů ze soutěže Moravskoslezský matematický šampionát 2007

Ostrava 23. 10. 2007

Název	**Moravskoslezský matematický šampionát 2007**
Editor	**RNDr. Eva Davidová**
Vydavatel	**Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, p.o.** **Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba**
Náklad	**400 ks**
Rozsah	**32 stran**
Vydání	**první, 2007, revize 1**
Tisk	**Repronis Ostrava**
Doporučená cena	**zdarma**

Texty neprošly jazykovou úpravou.

ISBN 80-87058-04-6