Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba
příspěvková organizace

Moravskoslezský matematický šampionát 2008

Sborník

Ostrava-Poruba
23. 10. 2008

EAN 978-80-87058-08-4

Organizační výbor

Mgr. Bc. Libor Klubal	hlavní organizátor
RNDr. Eva Davidová	odborný matematický dohled, editor sborníku
RNDr. Michal Vavroš, Ph.D.	spolupráce s partnerskými školami
Mgr. Lada Stachovcová	technická podpora

RNDr. Jitka Bukovanská, Mgr. Jana Gajdušková

Mgr. Petra Kňurová, Mgr. David Martinák, Mgr. Jarmila Pecová

Obsah

Úvodní slovo

Vážení a milí mladí přátelé,

závidím vám vaše mládí a vzpomínám na to své. Pamatuji si, že jsem hltal dobrodružné knížky, a že mne nejvíc bavily ty, které v sobě kromě dobrodružství měly také něco z vědy. Byly to například verneovky, ale vůbec nejvíc mne oslovily knížky našeho předního fyzika Františka Běhounka. Běhounek se zúčastnil polární výpravy vedené italským admirálem Umberto Nobilem. Letěli vzducholodí směrem nad severní pól, ale ztroskotali. Běhounek toto dobrodružství popsal v několika knížkách, ale kromě toho napsal vynikající knihy pro kluky o výpravách do Afriky, o zlatokopech a o cestách do Vesmíru. Ve všech jeho knihách se dobrodružství mísilo s vědou. A já v životě poznal, že věda sama a bádání jsou dobrodružstvím. Povedený pokus mně dával stejný pocit uspokojení jako vítězství ve sportu nebo zdolání nějaké překážky. Přeji vám, abyste i vy poznali báječné pocity, které věda poskytuje.

Prof. RNDr. Václav Pačes, DrSc.
předseda Akademie věd ČR

Byl jednou jeden král

Zadání

Byl jednou jeden král a ten měl tři syny. V průběhu let mělo sto jeho potomků dva syny, všichni ostatní zemřeli bezdětní. Kolik potomků měl král celkem?

Řešení

V první „generaci“ měl král tři syny, ve druhé šest (pokud měli všichni tři synové dva potomky), ve třetí 12, ve čtvrté 24, v páté 48, v šesté 96. Sečteme-li všechny potomky, kteří už dva syny mají, tzn. $3 + 6 + 12 + 24 + 48 = 93$, chybí ještě 7 do sta, tedy z oněch 96-ti v šesté generaci musí mít ještě 7 potomků 14 synů. Dohromady měl tedy král $93 + 96 + 14 = 203$ potomků.

Z Ahmesova papyru

Zadání

V roce 1858 objevil Angličan Rhind v blízkosti chrámu Ramsese II. v Thébách jeden z nejstarších matematických textů sepsaný egyptským písařem Ahmesem. Ahmesův papyrus obsahuje mimo jiné i následující úlohu:

Sto měr zrní je třeba rozdělit pěti dělníkům tak, aby druhý dělník dostal o tolik měr více než první, o kolik třetí dostal více než druhý, čtvrtý než třetí a pátý než čtvrtý. První dva dělníci mají dohromady dostat sedmkrát méně měr zrní než ostatní tři. Kolik měr zrní má dostat každý dělník?

Řešení

1. způsob řešení

Označme x počet měr zrní, které dostane první dělník, druhý dostane o a měr zrní více, tj. $x + a$, třetí o dalších a měr více, tj. $x + 2a$, obdobně čtvrtý dostane $x+3a$ a poslední $x+4a$ měr zrní. Podle první podmínky úlohy tedy celkově $x + x + a + x + 2a + x + 3a + x + 4a = 5x + 10a = 100$.

Z druhé podmínky plyne $7(2x + a) = 3x + 9a$, neboli $11x = 2a$. Dostáváme tak soustavu dvou rovnic o neznámých a a x

$$\begin{aligned} x + 2a &= 20 \\ 11x &= 2a, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $x = \frac{5}{3}$, $a = \frac{55}{6}$. Počty měr zrní, které obdrželo zmíněných pět dělníků, jsou tedy po řadě $\frac{10}{6}$, $\frac{65}{6}$, $\frac{120}{6} = 20$, $\frac{175}{6}$ a $\frac{230}{6}$.

2. způsob řešení

Uvědomíme-li si, že přírůstky měr obilí jsou konstantní, můžeme řešit úlohu elegantněji tak, že si pomocí neznámé m označíme počet měr zrní, které má dostat prostřední z dělníků, tj. třetí dělník. Druhý pak dostane $m-a$, první $m - 2a$, čtvrtý $m + a$ a pátý $m + 2a$. Dohromady dostanou

$$m - 2a + m - a + m + m + a + m + 2a = 5m = 100.$$

Odtud $m = 20$. Prostřední dělník má tedy dostat 20 měr obilí.

Hodnotu proměnné a vypočteme z podmínky $7(2m - 3a) = 3m + 3a$. Po dosazení $m = 20$ dostáváme přírůstek $a = \frac{55}{6}$. Závěr je stejný jako u předchozího způsobu řešení.

Pravidelný osmiúhelník

Zadání

Matematik čekající na rozsudek v cele o půdorysu tvaru pravidelného konvexního osmiúhelníku si krátil dlouhou chvíli geometrickými problémy. Označil si vrcholy osmiúhelníku $ABCDEFGH$ a průsečík uhlopříček AD a CG jako X. Přišel na to, že trojúhelník CDX je rovnoramenný. Má pravdu? Svůj závěr zdůvodněte výpočtem.

Řešení

V rovnoramenném trojúhelníku CDS je

$$|\sphericalangle DCX| = \frac{180° - \frac{360°}{8}}{2} = 67{,}5°.$$

V osmiúhelníku $ABCDEFGH$ platí

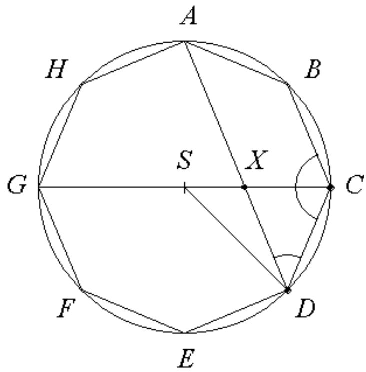
$$|\sphericalangle DCB| = 2|\sphericalangle DCX| = 135°.$$

V rovnoramenném lichoběžníku $ADCB$ platí

$$|\sphericalangle CDX| = 180° - 135° = 45°,$$

v trojúhelníku DCX je

$$|\sphericalangle CXD| = 180° - 45° - 67{,}5° = 67{,}5°.$$



Obr. 1

Velikosti úhlů CXD a DCX jsou stejné, to znamená, že trojúhelník CDX je rovnoramenný.

Okovy vína

Zadání

Dva obchodníci přišli k bráně Paříže. Jeden měl 64, druhý 20 okovů vína. Neměli však dostatek peněz, aby mohli zaplatit clo. Chybějící peníze nahradili vínem. První zaplatil 40 franků a ještě 5 okovů vína. Druhý dal dva okovy vína a dostal nazpátek 40 franků. Zač byl jeden okov vína a jaké bylo clo za jeden okov?

Řešení

5 okovů a 40 franků je clo za 64 okovů vína, 2 okovy bez 40-ti franků je clo za 20 okovů vína. Dohromady tedy 7 okovů představuje clo za 84 okovů, z čehož plyne, že 1 okov je clo za 12 okovů. Tedy dále 5 okovů je clo za 60 okovů a za zbylé 4 okovy zaplatil první obchodník těch 40 franků. Je zřejmé, že clo za jeden okov je tedy 10 franků. Cena jednoho okovu vína je potom $10 \cdot 12 = 120$ franků, protože jedním okovem bylo zaplaceno clo za 12 okovů.

Královská loď

Zadání

Řešení

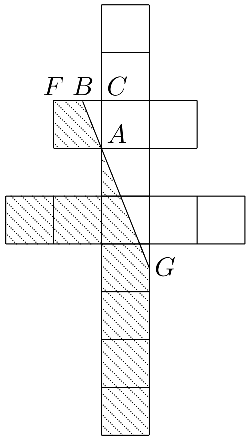
Označme délku lodi jako x; dále označme vzdálenost, kterou loď urazí během jednoho Aulétova kroku, jako y (obě vzdálenosti jsou vyjádřeny v krocích). Pak ve směru plavby Aulétés urazil $x + 120y = 120$ kroků, proti směru plavby $x - 30y = 30$ kroků. Dostáváme tak soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, jejímž řešením jsou čísla $y = \frac{3}{5}$, $x = 48$.

Královská loď tedy měří 48 kroků.

Lotrinský kříž

Zadání

Na obr. 2 je lotrinský kříž, který se skládá z patnácti jednotkových čtverců. Bodem A je vedena přímka BG, dělící kříž na dvě části o stejném obsahu. V jakém poměru dělí bod B úsečku FC?



Obr. 2

Řešení

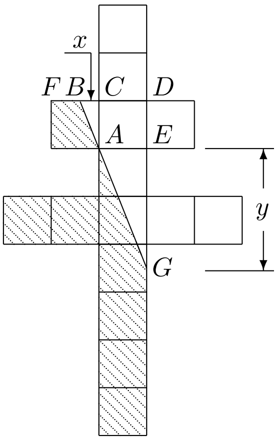
Obsah celého kříže je 15 čtverců, tedy obsah jedné ze dvou částí je 7,5 čtverců, a tedy obsah trojúhelníku BDG (viz obr. 3) je 2,5 čtverce. Označme velikost úsečky BC jako x a úsečky GE jako y. Pak

$$\frac{|BD| \cdot |DG|}{2} = \frac{(x+1)\,(y+1)}{2} = \frac{1}{2}\,(xy + x + y + 1) = \frac{5}{2},$$

odkud po vynásobení dvěma $xy + x + y + 1 = 5$.

Součet obsahů trojúhelníků ABC a AEG je 1,5 čtverce, tedy

$$\frac{x \cdot 1}{2} + \frac{y \cdot 1}{2} = \frac{3}{2},$$



Obr. 3

odkud po úpravě $x + y = 3$. Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} xy + x + y + 1 &= 5 \\ x + y &= 3, \end{aligned}$$

která je ekvivalentní se soustavou

$$\begin{aligned} xy &= 1 \\ x + y &= 3. \end{aligned}$$

Řešení této soustavy vede ke kvadratické rovnici $x^2 - 3x + 1 = 0$, která má dva kořeny

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Zadání úlohy ovšem vyhovuje pouze kořen $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ (druhý kořen je větší než jedna).

Pak $1 - x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Hledaný poměr tedy je

$$\frac{|FB|}{|BC|} = \frac{1 - x}{x} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 - \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2},$$

resp. $\dfrac{|BC|}{|FB|} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$. Bod B tedy dělí úsečku FC v poměru tzv. zlatého řezu.

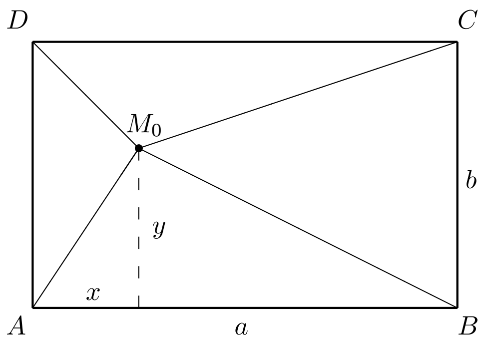
Zlatá zrnka

Zadání

Zlatokop má truhličku tvaru kvádru se zlatými zrnky. Chce si koupit koně a chytrý obchodník s koňmi mu nabízí jednoho koně výměnou za všechna zlatá zrnka z jeho truhly, pro která se sobě rovnají součty čtverců jejich vzdáleností od protilehlých spodních rohů truhličky. Zlatokop s obchodem souhlasil, ale pak s údivem zjistil, že má sice koně, ale prázdnou truhlu. Dokažte, že obchodník dodržel dohodu a nevzal si nic, co mu nepatřilo.

Řešení

Označme vrcholy podstavy truhličky A, B, C, D, rozměry podstavy označme a, b. Předpokládejme nejprve, že zlaté zrnko leží na dně truhly, označme tento bod M_0. Pak (viz obr. 4) platí



Obr. 4

$$|AM_0|^2 + |CM_0|^2 = x^2 + y^2 + (a - x)^2 + (b - y)^2,$$

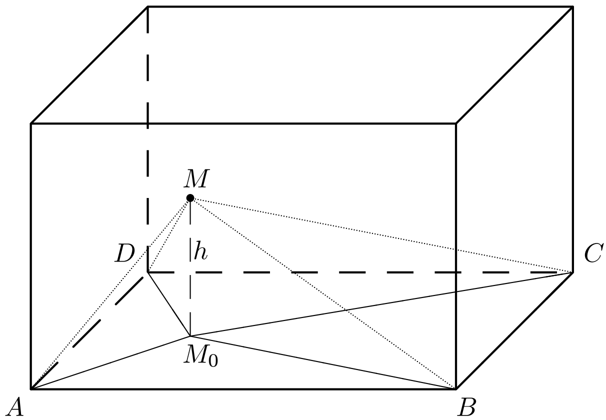
dále platí

$$|BM_0|^2 + |DM_0|^2 = (a - x)^2 + y^2 + x^2 + (b - y)^2,$$

odkud

$$|AM_0|^2 + |CM_0|^2 = |BM_0|^2 + |DM_0|^2. \tag{1}$$

Jestliže se zlaté zrnko nachází v bodě M ve výšce h nad rovinou podstavy



Obr. 5

(viz obr. 5), představuje nyní bod M_0 kolmý průmět bodu M do roviny podstavy a platí

$$|AM|^2 + |CM|^2 = |AM_0|^2 + h^2 + |CM_0|^2 + h^2,$$
$$|BM|^2 + |DM|^2 = |BM_0|^2 + h^2 + |DM_0|^2 + h^2,$$

z čehož vzhledem k (1) plyne rovnost

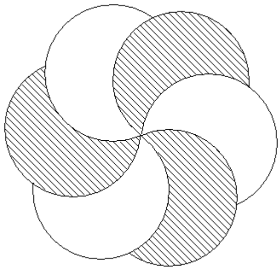
$$|AM|^2 + |CM|^2 = |BM|^2 + |DM|^2.$$

Obchodník si tedy mohl bez obav vzít celý obsah truhly, neboť pro polohu každého zlatého zrnka platí požadovaný vztah.

Obsah růžice

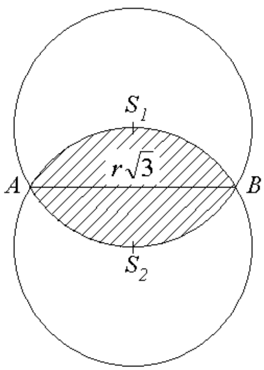
Zadání

Součástí rozety v průčelí kostela je dvoubarevná růžice složená ze šesti shodných částí kruhu o poloměru r, viz obr. 6. Určete obsah růžice.



Obr. 6

Řešení



Obr. 7

Středy kruhů vytvářejí vrcholy pravidelného šestiúhelníku. Plocha každého „okvětního plátku" růžice je tvořena plochou kruhu o poloměru r zmenšeného o plochu dvou kruhových úsečí tohoto kruhu odpovídajících středovému úhlu 120°. Délka tětivy odpovídající oblouku úseče je tedy $r\sqrt{3}$, střed tětivy má od středu kruhu vzdálenost rovnou $\frac{1}{2}r$.

Obsah úseče je roven

$$S_u = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{1}{2} \cdot r\sqrt{3} \cdot \frac{r}{2} = \frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}.$$

Obsah jednoho „plátku" je

$$S_p = \pi r^2 - 2\left(\frac{\pi r^2}{3} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi r^2}{3} + \frac{r^2\sqrt{3}}{2}.$$

Obsah celé růžice je tedy roven

$$S = 6\left(\frac{\pi r^2}{3} + \frac{r^2\sqrt{3}}{2}\right) = r^2\left(2\pi + 3\sqrt{3}\right).$$

Sultánovy perly

Zadání

Sultán si vybírá u klenotníka čtyři stejně velké perly do své skleněné šperkovnice tvaru pravidelného čtyřstěnu o hraně délky 10 kávových zrn. Chce je do šperkovnice umístit tak, aby se navzájem dotýkaly a každá z nich se také dotýkala tří stěn šperkovnice. Určete poloměr sultánových perel.

Řešení

Sultánovy perly si lze představit jako čtyři koule o poloměru r, které umístíme do pravidelného čtyřstěnu o hraně velikosti $a = 10$ kávových zrn. Středy těchto koulí tvoří vrcholy jiného pravidelného čtyřstěnu o velikosti hrany $2r$, který má s čtyřstěnem představujícím šperkovnici společné těžiště. Tyto čtyřstěny jsou stejnolehlé se středem stejnolehlosti v uvažovaném těžišti.

Vzdálenosti odpovídajících si stěn obou čtyřstěnů jsou rovny poloměru r uvažovaných koulí (perel). Velikost poloměru r je tedy rovna rozdílu velikosti poloměrů koulí vepsaných do zmíněných stejnolehlých čtyřstěnů, tzn.

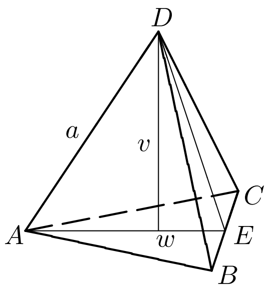
$$r = \varrho - \varrho_1, \tag{1}$$

kde ϱ je poloměr koule vepsané do šperkovnice a ϱ_1 je poloměr koule vepsané do čtyřstěnu vytvořeného středy perel.

Stěnová a tělesová výška pravidelného čtyřstěnu tvořícího šperkovnici mají velikosti:

$$w = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad v = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

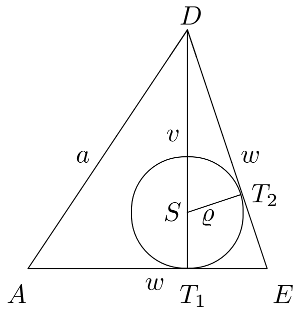
Provedeme-li vrcholový řez rovinou obsahující boční hranu a stěnovou výšku protilehlé stěny (obr. 8), můžeme z tohoto trojúhelníku složeného ze stran w, w, a vypočítat poloměr ϱ koule vepsané do pravidelného čtyřstěnu.



Obr. 8

Z podobnosti trojúhelníků DT_1E a DT_2S (obr. 9) totiž plyne

$$\frac{\frac{1}{3}w}{v} = \frac{\varrho}{\frac{2}{3}w} \Rightarrow \varrho = \frac{2w^2}{9v} = \frac{a\sqrt{6}}{12}.$$



Obr. 9

Odobně můžeme vyjádřit $\quad \varrho_1 = \dfrac{2r\sqrt{6}}{12}.$

Po dosazení do vztahu (1) dostáváme

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12} - \frac{2r\sqrt{6}}{12}.$$

Dosadíme-li $a = 10$, získáváme po úpravě rovnici $12r + 2\sqrt{6}r = 10\sqrt{6}$, odkud

$$r = \frac{5\sqrt{6}}{6+\sqrt{6}} = \sqrt{6} - 1.$$

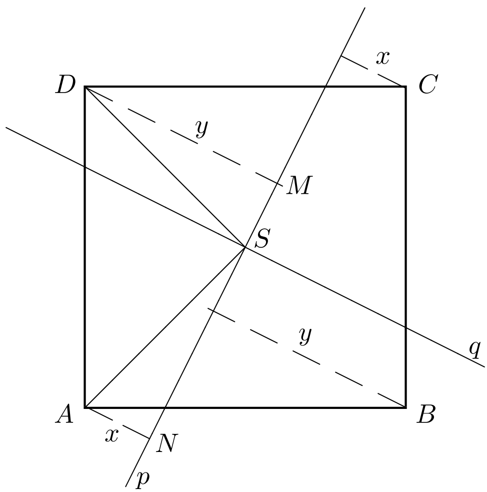
Poloměr sultánových perel je $\left(\sqrt{6} - 1\right)$ kávových zrn (přibližně 1,45 kávového zrna).

Klášterní zahrada

Zadání

Klášterní zahrada má tvar čtverce a výměru jeden hektar. Jejím středem vede úzká přímá pěšinka, která neústí ani do rohů zahrady, ani do středů jejích stran. Určete, jaký je součet druhých mocnin vzdáleností všech čtyř rohů zahrady od této pěšinky.

Řešení



Obr. 10

Označme rohy zahrady $ABCD$ a pěšinku p. Výměra zahrady je $1\,\mathrm{ha} = 10\,000\,\mathrm{m}^2$, tedy délka strany zahrady je $a = |AB| = 100\,\mathrm{m}$. Protože p prochází středem S, je vzdálenost protilehlých rohů A a C, resp. B a D od p stejná. Označme tyto vzdálenosti x a y. Hledáme tedy hodnotu součtu $2x^2 + 2y^2$.

1. způsob řešení

Otočme přímku p kolem S o $90°$ do polohy q. Je zřejmé, že např. vzdálenost $|Cp| = |Dq| = x$. Pak ovšem také $|MS| = x$. Z pravoúhlého trojúhelníka DMS pak přímo plyne, že $x^2 + y^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$. Hodnota hledaného součtu je pak $2x^2 + 2y^2 = a^2 = 100^2 = 10\,000$.

2. způsob řešení

Trojúhelníky DMS a SNA jsou shodné, protože jsou oba pravoúhlé, shodují se v délce přepony (polovina úhlopříčky čtverce) a shodné jsou rovněž úhly $|\sphericalangle DSM| = |\sphericalangle SAN|$. Tudíž $|SM| = |AN| = x$. Hodnotu hledaného součtu pak dopočítáme stejně jako v předchozím případě.

Tři svíce

Zadání

Na chudé faře v Jenšovicích u Vysokého Mýta působil v 19. století kněz Václav Šimerka, který je autorem následující úlohy: „Ze tří svic, které se na jedné straně oltáře nacházejí a stejně tlusté jsou, má jedna 22, druhá 18 a třetí 16 palců délky. Kostelník má z nich vždy dvě spolu nechati stejně dlouho hořeti. Jak musí jimi svítiti, aby mu žádný zbytečný oharek nezůstal?“

Řešení

Nechť x značí počet palců, který ubude, hoří-li první a druhá svíce společně; y označme počet palců, který ubude, hoří-li druhá a třetí svíce společně; z označme počet palců, který ubude, hoří-li první a třetí svíce společně. Zřejmě tedy $2x + 2y + 2z = 22 + 18 + 16 = 56$. Tedy $x + y + z = 28$.

Z podmínky, že dvě svíce hoří vždy současně a musí vyhořet úplně, dostáváme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x + z &= 22 \\ x + y &= 18 \\ y + z &= 16, \end{aligned}$$

jejímž řešením jsou čísla $x = 12$, $y = 6$, $z = 10$.

Svíce je třeba zapalovat tak, aby první a druhá spolu hořely tak dlouho, až ubude z každé 12 palců délky, dále druhá a třetí hoří spolu tak dlouho, až ubude 6 palců jejich délky (druhá již tedy dohoří úplně), pak hoří společně první a třetí, až ubude z každé 10 palců délky, tj. obě dohoří úplně. Na pořadí, ve kterém se zapalují dvojice svic, nezáleží.

Pewnego razu żył sobie król

strona 9

Żył sobie pewien król. Miał trzech synów. Sto jego potomków miało dwóch synów. Reszta nie miała dzieci. Ile potomków miał król?

Z papirusu Ahmesa

strona 10

Żyjący ok. 2000 lat przed naszą erą Ahmes był nadwornym matematykiem i pisarzem faraona Amenemhata III. Oto jego zadanie:

Sto miar ziarna należy podzielić między pięciu robotników tak, aby drugi otrzymał o tyle miar więcej od pierwszego, o ile trzeci otrzymał więcej od drugiego, czwarty – od trzeciego i piąty od czwartego. Prócz tego dwóch pierwszych robotników razem powinno otrzymać siedem razy mniej miar ziarna niż trzej pozostali. Ile miar ziarna otrzymał każdy robotnik?

Ośmiokąt foremny

strona 11

Matematyk czekający na wyrok w więziennej celi w kształcie foremnego ośmiokąta wypukłego, skracał sobie czas rozwiązywaniem problemów geometrycznych. Oznaczył sobie wierzchołki ośmiokąta $ABCDEFGH$. Punkt przecięcia przekątnych AD i CG oznaczył X. Stwierdził, że trójkąt CDX jest równoramienny. Ma racje? Udowodnij!

Wiadra z winogronami

strona 12

Dwaj handlarzy dotarli do bramy Paryża. Jeden miał 64 a drugi 20 wiader winogron. Brakowało im pieniędzy na zapłacenie cła. Brakujące pieniądze uregulowali winogronami, by móc handlować w mieście. Pierwszy handlarz zapłacił czterdziestoma frankami i pięcioma wiadrami winogron, drugi dał 2 wiadra i otrzymał 40 franków z powrotem. Ile kosztowało a ile jest cło za jedno wiadro winogron?

Łódź królewska

strona 13

Młody Auletes siedział na brzegu rzeki Nil. Po Nilu płynęła łódź królewska. Auletesa interesowała długość łodzi, ile jego kroków mierzy pokład łodzi. Chwilę się zastanawiał, potem ruszył wzdłuż brzegu w kierunku płynącej łodzi. Stwierdził, że od jednego końca łodzi do drugiego potrzebuje 120 kroków. W przeciwnym kierunku naliczył 30 kroków. Usiadł, zastanowił się i obliczył długość łodzi. Ile kroków ma łodź królewska?

Krzyż Lotaryński

strona 14

Na obr. 2 jest krzyż lotaryński, który składa się z piętnastu jednostkowych kwadratów. Przez punkt A przechodzi prosta BG, która rozdziela krzyż na dwie części o jednakowej powierzchni. W jakim stosunku punkt B dzieli odcinek FC?

Złote ziarnka

strona 16

Poszukiwacz złota ma skrzynkę w kształcie sześcianu ze złotymi ziarenkami. Chce kupić sobie konia, lecz sprytny handlarz proponuje mu jednego konia za ty ziarnka z jego skrzynki, dla których są sumy kwadratów odległości od dolnych przeciwległych wierzchołków dna skrzynki równe. Poszukiwacz zgodził się, ale zdziwiony stwierdził, że ma wprawdzie konia, ale ma też pustą skrzynkę. Udowodnij, że handlarz dotrzymał umowy i nie zabrał sobie nic, co by do niego nie należało.

Rozeta

strona 18

Częścią składową frontu kościoła jest rozeta dwukolorowa złożona z sześciu jednakowych części koła o promieniu r, wiz obr. 6. Oblicz pole powierzchni rozety.

Perły Sułtana

strona 20

Sułtan wybiera sobie u jubilera cztery jednakowe perły do swej szklanej skrzynki w kształcie czworościanu foremnego o długości krawędzi 10 ziarnek kawy. Chce je umiejscowić do skrzynki tak, aby się nawzajem dotykały i dotykały trzech ścian skrzynki. Określ promień pereł.

Ogród klasztorny

strona 22

Ogród klasztorny ma kształt kwadratu o powierzchni jednego hektara. Jego środkiem prowadzi wąska prosta ścieżka, która nie kończy się ani w rogu, ani w środku boku. Określ sumę kwadratów odległości czterech rogów ogrodu od ścieżki.

Trzy świece

strona 24

Na ubogiej plebanii v Jenšovicích u Vysokého Mýta żył w XIX wieku ksiądz Václav Šimerka, który jest autorem następującego zadania: Trzy świece, które znajdują się po jednej stronie ołtarza i są jednakowej grubości, jedna ma 22 cale, druga 18 cali a trzecia 16 cali długości. Kościelny ma za zadanie zawsze dwie świece zapalić i zostawić je jednakowo długo zapalone. Jak musi je zapalać, by nic nie pozostało?

Poznámky

Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, příspěvková organizace

Sborník příkladů ze soutěže Moravskoslezský matematický šampionát 2008

Ostrava 23. 10. 2008

Název	Moravskoslezský matematický šampionát 2008
Editor	RNDr. Eva Davidová
Vydavatel	Wichterlovo gymnázium, Ostrava-Poruba, p.o. Čs. exilu 669, 708 00 Ostrava-Poruba
Náklad	400 ks
Rozsah	32 stran
Vydání	první, 2008, revize 1
Tisk	Repronis Ostrava
Doporučená cena	zdarma

Texty neprošly jazykovou úpravou.

EAN 978-80-87058-08-4